

**Funktionalgleichungen für die Riemannsche,
die Hurwitzsche und die Lipschitz-Lerchsche
Zetafunktion**

**Inauguraldissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin**

**vorgelegt von
Dieter Klusch
aus Berlin-Charlottenburg
Berlin 1978**



Digitized by the Internet Archive
in 2026

FUNKTIONALGLEICHUNGEN FÜR DIE RIEMANNSCHE,
DIE HURWITZSCHE UND DIE LIPSCHITZ-LERCHSCHE
ZETA-FUNKTION

Inauguraldissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
D i e t e r K l u s c h
aus Berlin-Charlottenburg
Berlin 1977

1. Referent: Professor Dr. H.L. S e l b e r g
(Prof. em. an der Universität Oslo/Norwegen)
2. Referent: Professor Dr. H. B e g e h r
(Freie Universität Berlin)



Tag der mündlichen Prüfung: 23. Dezember 1977
Tag der Promotion: 11. Januar 1978

Meinem Lehrer
Prof. Dr. Alexander Dinghas
zum Gedenken

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Über die Charakterisierung einer Klasse von meromorphen Funktionen durch äquivalente Funktionalgleichungen.....	15
2. Äquivalente Relationen zu Funktionalgleichungen vom Riemannschen Typ.....	18
2.1. Die logarithmierte Poisson-Jacobische Thetarelation.....	18
2.2. Hardy-Ramanujansche Identitäten.....	20
2.3. Die Ramanujansche τ -Funktion.....	25
3. Spezielle Ramanujan-Entwicklungen.....	27
4. Einige Bemerkungen über die Theorie der Ramanujan-Entwicklungen, über das Dirichletsche Teilerproblem und die Eulersche Konstante γ	32
5. Über die gleichmäßige trigonometrische Approximierbarkeit analytischer Funktionen.....	36
6. Die Funktionalgleichungen von Jensen und Ramaswami.....	42
7. Integraldarstellungen.....	51
8. Eindeutigkeitssätze.....	60
8.1. Die Hadamard-Dinghassche Charakterisierungstheorie der Riemannschen Zetafunktion.....	60
8.2. Die eindeutige Charakterisierung der Riemannschen Zetafunktion durch Hadamardsche Lückenfunktionalgleichungen.	64
9. Funktionalgleichungen für die Lipschitz-Lerchsche Zetafunktion.....	69
Literaturverzeichnis.....	79

Einleitung

Die in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 1$ durch die "einfachste" Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (1)$$

definierte Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ hat B.Riemann 1859 in seiner berühmten Abhandlung "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe" eingeführt und die dort berührten tiefliegenden Probleme haben fast alle bedeutenden Analytiker zum Studium der funktionentheoretischen Eigenschaften von $\zeta(s)$ angeregt, wobei insbesondere Riemanns beiläufig geäußerte bis heute unbewiesene Vermutung, daß alle komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der "kritischen" Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ liegen, zweifellos eine gewisse "Popularität" erlangt hat.

Auch die fundamentale Rolle, die die Riemannsche Zetafunktion in den verschiedensten Zweigen der analytischen Zahlentheorie spielt, dürfte wohlbekannt sein. Erwähnt sei beispielsweise nur der den Primzahlsatz implizierende klassische Hadamard-de la Vallée Poussinsche Satz von 1896 über die Nullstellenfreiheit von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$ (s. z.B. [32], S.89 ff).

Die Riemannsche Zetafunktion kann in die ganze s -Ebene zu einer dort meromorphen, einen einzigen (einfachen) Pol bei $s=1$ mit dem Residuum 1 aufweisenden Funktion fortgesetzt werden und genügt der von Euler 1749 für reelle s entdeckten, von Riemann in der o.g. Arbeit ([29]) für komplexe s zweifach bewiesenen Riemannschen Funktionalgleichung

$$\zeta(s) = 2 (2\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \quad (2)$$

A.Hurwitz betrachtete, (1) verallgemeinernd, in seiner bekannten, der Untersuchung spezieller Dirichletreihen, die bei der Bestimmung der Klassenzahl binärer quadratischer Formen auftreten, gewidmeten Arbeit von 1882 ([18]) die von dem Parameter $a \in \mathbb{R}^+$ abhängende, in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 1$ durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s} \quad (3)$$

definierte Hurwitzsche Zetafunktion $\zeta(s, a)$.

Jene ist ebenfalls in die ganze s -Ebene analytisch fortsetzbar und dort meromorph mit einem einzigen einfachen Pol bei $s=1$ mit dem Residuum 1. In der linken Halbebene $\operatorname{Re} s < 0$ gilt die Hurwitzsche Transformationsformel

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{(2\pi)^{1-s}} \left\{ \sin \frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi a n}{n^{1-s}} + \cos \frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi a n}{n^{1-s}} \right\}, \quad (4)$$

welche sich für $a=1$ auf (2) reduziert.

Vertieft und erweitert wurden die Resultate von Hurwitz durch R.Lipschitz ([24],[25]). Kernstück seiner Untersuchungen über eine charakteristische Beziehung zwischen den von Dirichlet in seinem Beweis des "Primzahlsatzes für arithmetische Progressionen" verwandten "Dirichletreihen" und der allgemeinen Kreisteilungstheorie ist die folgende Transformationsformel, die sogenannte "Lipschitz-Formel" ([25],(19)):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n a} (\eta + i n)^{-s} = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^{\infty} (k+a)^{s-1} e^{-2\pi \eta (k+a)} \quad (5)$$

mit $0 < a \leq 1$, $\operatorname{Re} s > 1$, $\operatorname{Re} \eta > 0$.

Einen nicht minder bedeutenden Beitrag zur Transformations- theorie verallgemeinerter Zetafunktionen leistete M.Lerch ([23]). Angeregt durch eine Arbeit von Kronecker (s. die Bemerkung auf S.130 in [25]), sich ebenso wie Lipschitz und Hurwitz auf die klassischen Riemannschen Methoden aus ([29]) stützend, entdeckte er, daß die für $0 < a \leq 1$ in der Halbebene

$$\operatorname{Re} s > \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

durch die ((3) verallgemeinernde) Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n x} (n+a)^{-s}$$

definierte Funktion $L(x, a, s)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden kann und für $0 < x < 1$, $0 < a \leq 1$ und $s \in \mathbb{C}$ der "Lerchschen Funktionalgleichung"

$$L(x, a, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left\{ A_1 \cdot L(-a, x, s) + A_2 \cdot L(a, 1-x, s) \right\} \quad (6)$$

mit

$$A_1 = e^{-\pi i \left\{ \frac{s}{2} - 2ax \right\}}, \quad A_2 = e^{-\pi i \left\{ \frac{s}{2} - 2a(1-x) \right\}}$$

genügt ([23], S.21 und (6)).

Bemerkenswert ist, daß Lipschitz nachweislich vor Lerch im Besitz der Formel (5) war, die unter den geeigneten Voraussetzungen aus (6) folgt (s. die Bemerkungen in [25], S.129 ff).

Auf weitere wichtige verallgemeinerte Zetafunktionen, wie z.B. die Dedekindsche Zetafunktion, die Dirichletschen L-Reihen oder die Epsteinsche Zetafunktion wird in der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen (s. aber Abschnitt 9.).

Vielmehr sollen hier neue Ergebnisse und Beweise bezüglich der Transformationstheorie der Riemannschen, der Hurwitzschen und der Lipschitz-Lerchschen Zetafunktion vorgestellt werden.

C.L.Siegel und H.Hamburger haben 1921 unabhängig voneinander bewiesen, daß die Riemannsche Zetafunktion durch die Funktionalgleichung (2) eindeutig charakterisiert wird ([12],[37]). Die Erkenntnis, daß diese Eindeutigkeitsaussage eng mit dem Bestehen von zu (2) äquivalenten Relationen verknüpft ist, verdanken wir H.Hamburger, der in ([13]) u.a. die überraschende Tatsache anführt, daß die Riemannsche Funktionalgleichung (2), die Poissonsche Summenformel und die Transformationsformel

$$\mathcal{Z}(z) = z^{-\frac{1}{2}} \mathcal{Z}(z^{-1}) \quad (z > 0) \quad (7)$$

für die Poisson-Jacobische Thetafunktion

$$\mathcal{Z}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 z} \quad (z > 0) \quad (8)$$

untereinander äquivalent sind, d.h., aus dem Bestehen einer dieser Relationen folgt die Gültigkeit der beiden anderen.

Allgemeiner beweist Hamburger u.a., daß die Funktionalgleichung vom Riemannschen Typ

$$\omega(s) = \gamma(1-s) \quad (9)$$

mit

$$\omega(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) \quad (10)$$

und

$$\gamma(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) g(s), \quad (11)$$

wobei $f(s)$ eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit einem einzigen einfachen Pol bei $s=1$ ist, $(s-1)f(s)$ eine ganze Funktion endlicher Ordnung darstellt und ferner $f(s)$ bzw. $g(s)$ durch die in $\operatorname{Re} s > 1$ absolut konvergenten allgemeinen Dirichletreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n^{-s}$$

dargestellt werden, äquivalent ist zu der Thetarelation

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi \lambda_n^2 \tau} = \frac{b_0}{\sqrt{\tau}} + \frac{2}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi \mu_n^2 \tau^{-1}} \quad (\tau > 0), \quad (12)$$

wobei die Konstanten a_0, b_0 nur von $f(s)$ abhängen.

Die allgemeinen funktionentheoretischen Entwicklungen des Abschnitts 1. der vorliegenden Arbeit erweitern diesen speziellen Hamburgerschen Ansatz.

Löst man sich nämlich von der durch (10) und (11) gegebenen Struktur von $\omega(s)$ und $\gamma(s)$ und betrachtet beliebige in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen $\omega(s)$ und $\gamma(s)$ mit einer festen gemeinsamen Regularitätshalbebene, wobei die Funktion $\omega(s) \tau^{-s}$ geeigneten asymptotischen Bedingungen genügt, die den Voraussetzungen des Prägmen-Lindelöfschen Prinzips entsprechen und deren Pole in einem festen zur reellen Achse symmetrischen Streifen liegen, so führt dies unter Beachtung des Cauchyschen Residuensatzes und des Eindeutigkeitssatzes für die Mellin-Transformierte auf die in 1. untersuchte Klasse von meromorphen Funktionen, die durch zwei äquivalente Funktionalgleichungen charakterisiert wird, wobei die erste (1.(2)) vom Riemannschen und die zweite (1.(8)) eine Thetarelation vom Mellinschen Typ ist, d.h., bei 1.(8) handelt es sich um eine Transformationsformel mit Restglied für Integrale vom Mellinschen Typ.

In Abschnitt 2. der vorliegenden Arbeit demonstrieren wir an einigen wenigen ausgewählten Beispielen die Anwendbarkeit der Entwicklungen in 1. auf die Transformationstheorie der Riemannschen Zetafunktion und verwandter Funktionen.

Dabei interessiert uns in 2.1. das Äquivalent zur logarithmisierten Poisson-Jacobischen Transformationsformel (7)

$$\log \mathcal{Z}(\tau) = -\frac{1}{2} \log \tau + \log \mathcal{Z}(\tau^{-1}). \quad (13)$$

Es ist klar, daß dieses nicht so einfach strukturiert sein kann wie (2). In Satz 1 wird gezeigt, daß (13) äquivalent ist zu der Funktionalgleichung vom Riemannschen Typ

$$\omega(s) = \omega(-s) \quad (14)$$

mit

$$\omega(s) = -(1-z^{1-s})(1-z^{s+1}) \Gamma(s) \zeta(s) \zeta(s+1) (2\pi)^{-s} \quad (15)$$

Der Beweis stützt sich u.a. auf die Produktdarstellung der Thetafunktion $\vartheta(\tau)$ (s. 2.1.(2)) und die neue Mellin-Transformierte

$$\log \zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega(s) z^{-s} ds \quad (c > 1, z > 0), \quad (16)$$

wobei $\omega(s)$ durch (15) definiert ist.

Seit E.Grosswald 1970 ([8]; s. aber auch [9]) im Zusammenhang mit dem seit Euler ungelösten Problem der Berechnung von $\zeta(s)$ an positiven ungeraden ganzzahligen Argumentstellen den Blick erneut auf S.Ramanujans geniales Gesamtwerk gelenkt hat, werden die in 2.2. behandelten Hardy-Ramanujanschen Identitäten wieder verstärkt diskutiert (s. [4], [20], [30], [38]).

In S.Ramanujans "Notebooks" ([26]) finden sich ohne Beweis u.a. die in 2.2. angeführten Identitäten 2.2. (14), (15), (21), (23), (35), (36), (37). Als erster hat G.H.Hardy die bemerkenswerte Formel 2.2.(14) zweifach bewiesen ([14]). B.C.Berndt ist 1977 der Nachweis gelungen ([4]), daß jene Transformationsformeln einer gemeinsamen Quelle entspringen, der Theorie der elliptischen Modultransformationen. Dies beeinträchtigt natürlich in keiner Weise die Bedeutung der teilweise überaus trickreichen Einzelbeweise für die o.g. Ramanujanschen Formeln (s. hierzu die umfangreichen Literaturangaben in [4]).

In Abschnitt 2.2. erweitern wir das Blickfeld der auf die bloße Herleitung der Hardy-Ramanujan-Identitäten fixierten Gesamtdiskussion durch einen neuen Aspekt, indem wir mit Hilfe der Analysis aus 1. nicht nur die Ramanujanschen "Grenzformeln" 2.2.(15) bzw. 2.2.(37) beweisen, sondern auch gleichzeitig dazu äquivalente Relationen, d.h., Funktionalgleichungen vom Riemannschen Typ angeben.

Der Satz 2 zeigt, daß die Ramanujansche "Grenzformel"

$$\Omega(z) + \Omega(z^{-1}) = \frac{1}{24} \{z + z^{-1}\} - \frac{1}{4\pi} \quad (z > 0) \quad (17)$$

mit

$$\Omega(z) = z \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi n z} (e^{2\pi n z} - 1)^{-2} \quad (18)$$

äquivalent ist zu der Funktionalgleichung

$$\omega(s) = -\omega(-s) \quad (19)$$

mit

$$\omega(s) = s \Gamma(s) \zeta(s) \zeta(s+1) (2\pi)^{-s}, \quad (20)$$

und Satz 3 konstatiert, daß die Ramanujansche "Grenzformel"

$$\Omega(z) - \Omega(z^{-1}) = \frac{1}{2} \log z - \frac{\pi}{12} \{z - z^{-1}\} \quad (z > 0) \quad (21)$$

mit

$$\Omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{2\pi n z} - 1)^{-1} \quad (22)$$

äquivalent ist zu der Funktionalgleichung

$$\omega(s) = \omega(-s) \quad (23)$$

mit

$$\omega(s) = \zeta(s) \Gamma(s) \zeta(s+1) (2\pi)^{-s}. \quad (24)$$

Ferner gehen wir kurz auf die u.a. in ([4],[8],[9],[38]) diskutierte Ramanujansche Formel für $\zeta(2k+1)$ ($k \in \mathbb{N}$) ein :

Für $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha \cdot \beta = \pi^2$ gilt

$$\begin{aligned} & \alpha^{-k} \left\{ \frac{1}{2} \zeta(2k+1) + \sum_{n \geq 1} \frac{n^{-2k-1}}{e^{2n\alpha} - 1} \right\} - (\beta)^k \left\{ \frac{1}{2} \zeta(2k+1) + \sum_{n \geq 1} \frac{n^{-2k-1}}{e^{2n\beta} - 1} \right\} = \\ & = 2^{2k} \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{B_{2k+2-2n}}{(2k+2-2n)!} \alpha^{k+1-n} \beta^k. \end{aligned} \quad (25)$$

Die bisher bekannten Beweise von (25) benutzen grundlegende Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion.

In der Tat aber hat man aus theoretischer Sicht wegen der Gleichung $\coth x = 1 + 2(e^{2x} - 1)^{-1}$ ($x > 0$) keine Veranlassung, dem Summanden $\zeta(2k+1)$ in (25) Bedeutung beizumessen, so daß die Transformationsformel 2.2.(26) mit 2.2.(24),(25) in den Vordergrund der Betrachtung treten muß, für die wir einen von der Riemannschen Zetafunktion völlig unabhängigen neuen Beweis erwähnen (s. 2.2.(31), aber auch 2.2.(32),(33)).

Schließlich gehen wir noch in 2.3. im Zusammenhang mit Hardys Untersuchungen der Ramanujanschen τ -Funktion (s. [17], S.170 ff) auf die erzeugende ganze Funktion

$$F(s) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) n^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > \frac{13}{2})$$

ein, die, wie Hardy bewiesen hat ([17], S.173), der Funktionalgleichung

$$G(s) = G(12-s) \quad (26)$$

mit

$$G(s) = F(s) F(s) (2\pi)^{-s}$$

genügt und zeigen mit Hilfe der Äquivalenzaussage des Abschnitts 1., daß (26) äquivalent ist zu der Thetarelation

$$\Omega(\tau) = \tau^{-12} \Omega(\tau^{-1}) \quad (\tau > 0)$$

mit

$$\Omega(\tau) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) e^{-4\pi n \tau}$$

(s. 2.3., Satz 4).

Der Abschnitt 3. der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich der Wertbestimmung spezieller Ramanujan-Reihen. Jene haben die allgemeine Form

$$\sum_{q \geq 1} a_q R(c_q(n)) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (27)$$

wobei die Koeffizienten $a_q \in \mathbb{C}$ nicht von n abhängen und $R(c_q(n))$ eine rationale Funktion der Ramanujanschen trigonometrischen Summe

$$c_q(n) = \sum_{h \in \mathcal{R}(q)} e^{-2\pi i n h/q} = \sum_{h \in \mathcal{R}(q)} \cos \frac{2\pi n h}{q} \quad (28)$$

ist. Hierbei bedeutet $h \in \mathcal{R}(q)$, daß h ein vollständiges primes reduziertes Restsystem modulo q durchläuft.

Reihen der Form (27) beanspruchen höchstes Interesse. Das Hauptglied des O-Resultats des Satzes von Goldbach-Vinogradoff für die Anzahl $r(n)$ der Lösungen der Gleichung $n=p_1+p_2+p_3$ in Primzahlen p_i ($i=1,2,3$) macht dies deutlich. Es enthält als Faktor die Reihe

$$\sum_{q \geq 1} \mu(q) y^{-3} c_q$$

($n \in \mathbb{N}$, $\mu(\cdot)$ bzw. $y(\cdot)$ ist die Möbiusfunktion bzw. die Eulersche y -Funktion), welche vom Typ (27) ist.

Als erste haben sich Ramanujan und Hardy mit Reihen der Art (27)

beschäftigt und u.a. folgende schöne Resultate erzielt (s. [15], [27]):

$$\sum_{q \geq 1} q^{-s} c_q(n) = \frac{6}{\pi^2 n} \sigma(n) \quad (29)$$

$$\sum_{q \geq 1} \frac{\log q}{q} c_q(n) = -d(n) \quad (30)$$

$$\sum_{q \geq 1} q^{-1} c_q(n) = 0. \quad (31)$$

Hierbei ist $d(n)$ die Anzahl, $\sigma(n)$ die Summe der Teiler von n . (31) ist von gleicher Tiefe wie der Primzahlsatz und (29) ein Spezialfall der für $\operatorname{Re} s > 1$ gültigen Ramanujanschen Gleichung

$$\sum_{q \geq 1} q^{-s} c_q(n) = \frac{\sigma_{1-s}(n)}{s(n)} , \quad (32)$$

wobei

$$\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s$$

(s. 3., Lemma 2).

Betrachtet man nun die Koeffizienten a_q in (30) etwas näher, so kann der Zusammenhang mit der logarithmierten Poisson-Jacobischen Transformationsformel (13) kaum übersehen werden. Wenn man außerdem noch (32) und die spezifische Struktur des Integranden des Mellinschen Integrals (16) für den Logarithmus der Thetafunktion berücksichtigt, so führt dies bezüglich (27) zwangsläufig auf den Ansatz

$$a_q = \frac{\log \sigma(q)}{q} . \quad (33)$$

Setzt man

$$W(x) = \frac{1}{2} \{ 1 - 5 \coth \pi x \} + \coth \frac{\pi x}{2} + \coth 2\pi x \quad (34)$$

und $R(c_q(n)) = c_q(n)$ bzw. $= T_q(n)$ bzw. $= T_{q,s}(n)$, wobei die Ramanujanschen Summen T_q und $T_{q,s}$ definiert sind durch

$$T_q(n) = \frac{1}{2} \sum_{h \in \mathcal{R}(q)} \left\{ \frac{\sin \{(2n+1)\pi h/q\}}{\sin \pi h/q} - 1 \right\}$$

bzw.

$$T_{q,s}(n) = \sum_{h \in \mathcal{R}(q)} \sum_{v=1}^n v^s \cos 2\pi v h/q$$

mit dem Parameter $s \in \mathbb{C}$, so erhält man in der Tat auf rein funktionentheoretischem Wege direkt aus dem Reihenansatz die neuen Ramanujan-Entwicklungen der auf $\mathbb{N}$ definierten Funktionen $\sum_{d|n} w(d)$ bzw. $\sum_{v=1}^n \sum_{d|v} w(d)$ bzw. $\sum_{v=1}^n v^s \sum_{d|n} w(d)$ (s. 3., Satz 5).

Interessant ist nun der Umstand, daß die Entwicklung (30) in die allgemeine Theorie der Ramanujan-Entwicklungen, auf die wir in Abschnitt 4. kurz eingehen, nicht eingeordnet werden kann. Ein weiteres Indiz für diese "pathologische Sonderrolle" von (30), ist die aus unserem Satz 5 fließende neue Tatsache (s. 3., Korollar zu Satz 5), daß $d(n)$ eine Ramanujan-Entwicklung mit dem "Störglied" $2 \sum_{d|n} w(d) = O(1) \quad (n \rightarrow \infty)$ besitzt

$$d(n) = 2 \sum_{d|n} w(d) + \sum_{q \geq 1} \frac{6y q^{-2} (q-1)}{q} c_q(n) \quad (35)$$

($w(d)$ ist durch (34) definiert) und im Zusammenhang mit dem Dirichletschen Teilerproblem führt (35) unter Berücksichtigung der Chandrasekharan-Narasimhan-Identität 4.(6) zu den kompliziert gebauten neuen Darstellungen für $D(x) = \sum_{n \leq x} d(n)$ (4.(8)) bzw. für die Eulersche Konstante γ (4.(9)).

Nach den bekannten approximationstheoretischen Sätzen von S.N.Bernstein und N.I.Achieser (s.[31], S.196 ff) lassen sich analytische Funktionen durch Approximationseigenschaften im Reellen in einfacher Weise charakterisieren und man gelangt so zu einem konstruktiven Aufbau der Theorie der analytischen Funktionen.

Für uns sind hier die bemerkenswerten Untersuchungen von N.I.Achieser bezüglich der quantitativen Verschärfung der bekannten Weierstraßschen Approximationssätze von Interesse, insbesondere die in Abschnitt 5., Satz 7 berechnete "gleichmäßige trigonometrische Approximierbarkeit" $E_n(A_\delta)$ gewisser Klassen A_δ analytischer Funktionen.

Die ausführlichen Entwicklungen in 5. decken in Satz 8 überraschende neue Zusammenhänge zwischen gewissen aus Abschnitt 1. fließenden arithmetischen Aussagen (5., Satz 6) und der Approximationstheorie auf.

Einen in der Literatur erstaunlich wenig beachteten Funktionalgleichungstyp für die Riemannsche, die Hurwitzsche und die Lipschitz-Lerchsche Zetafunktion, der auf J.L.W.V.Jensen ([19]) und V.Ramaswami ([29]) zurückgeht und von diesen nur für die Riemannsche Zetafunktion entwickelt wurde, behandeln die Abschnitte 6.-9. der vorliegenden Arbeit. Dieser Funktionalgleich-

ungstyp unterscheidet sich auffällig von dem sich in den wohl-
bekannten Transformationsformeln (2), (4) und (6) manifestierenden
Riemannschen Typ. Sind (2) bzw. (6) Relationen für die ent-
sprechenden Funktionen an den Stellen s und $1-s$, so handelt es
sich bei den hier untersuchten Funktionalgleichungen um Darstel-
lungen durch unendliche Reihen, die die betreffenden Funktionen
an den Argumentstellen $s+\mu$ ($\mu \in \mathbb{N}_0$) enthalten.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, an Hand neuer Ergebnisse die Be-
deutung dieses Funktionalgleichungstyps für die Theorie der drei
genannten Zetafunktionen darzustellen.

Ausgangspunkt der Betrachtungen sind die folgenden Identitäten
für die Riemannsche Zetafunktion

$$1 = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \{ \zeta(s+\mu) - 1 \} \quad (36)$$

$$2^{-s} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \{ \zeta(s+\mu) - 1 \} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \zeta(s)(1-2^{1-s}) &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{\zeta(s+\mu)}{2^{s+\mu}} \\ &= 1 - \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{\zeta(s+\mu)}{2^{s+\mu}}, \end{aligned} \quad (38)$$

die von J.L.W.V.Jensen ([19]) stammen.

(36) ist von C.L.Siegel ([36]) wiederentdeckt worden. Er benutzt
(36) zum Beweis einer Formel von V.Brun, der mittels einer modi-
fizierten Form der Euler-Mac Laurinschen Summenformel eine Reihen-
darstellung für $(s-1)\zeta(s)$ hatte herleiten können, von der er
einen tiefliegenden Zusammenhang mit der Riemannschen Vermutung
annahm (s. [36]).

Unabhängig von Jensen gelangt V.Kamaswami ([29]) zu den "Lücken-
funktionalgleichungen"

$$2 \zeta(s)(1-2^{1-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{\zeta(s+\mu)}{2^{s+\mu}} \quad (39)$$

$$\zeta(s)(1-3^{1-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{\zeta(s+\mu)}{3^{s+\mu}} \quad (40)$$

$$\zeta(s)(1-2^{-s}-3^{-s}-6^{-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{\zeta(s+\mu)}{6^{s+\mu}} \quad (41)$$

und beweist mit Hilfe von (40) und (41), daß $\zeta(s)$ im Bereich $\operatorname{Re} s \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|s| \leq 8$ keine Nullstellen hat (s. Abschnitt 6.). Der daher sinnvolle Versuch die Identitätenfolge (39)-(41) in geeigneter Weise fortzusetzen, führt sofort auf die Frage nach einer allgemeinen Beweismethode für die Funktionalgleichungen (36)-(41). In der Literatur findet man ausschließlich Einzelweise (s. Jensen ([19]), Landau ([22], S.273), Ramaswami ([29]), Siegel ([36]), Titchmarsh ([39], S.33)).

Abschnitt 6. der vorliegenden Arbeit geht auf diese Problematik ein und stellt vor allem neue allgemeine "Ramaswami-Formeln" vor. Ausgehend von einer modifizierten Form des Binomialtheorems, die die unmittelbar (36) und (37) liefert, werden zwei Funktionalgleichungen für die Hurwitzsche Zetafunktion bewiesen (6., Satz 9), die als Spezialfall (38) enthalten und die nach Addition die für die Identitäten (39)-(41) grundlegende allgemeine "Ramaswami-Formel" ($\alpha > 1, s \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha) &= 1 + \alpha^{-s} \left\{ \zeta(s, \frac{\alpha-1}{\alpha}) + \zeta(s, \frac{\alpha+1}{\alpha}) \right\} - 2\alpha^{-s} \zeta(s) \\ &= 1 + 2 \sum_{\mu \in 2\mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{\zeta(s+\mu)}{\alpha^{s+\mu}} \end{aligned} \quad (42)$$

erzeugen. Durch Variation des Parameters α erhält man mühelos die Spezialfälle (39)-(41) und ferner für $\alpha=4$ eine neue Funktionalgleichung für die Riemannsche Zetafunktion vom Ramaswami-Typ

$$\zeta(s) (1 - 2^{-s} - 2 \cdot 4^{-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in 2\mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{\zeta(s+\mu)}{4^{s+\mu}}. \quad (43)$$

Es sei bemerkt, daß sich (36) und (37) auch unabhängig vom Binomialtheorem beweisen lassen. Diese neue Beweismethode stützt sich auf die bekannten Integraldarstellungen der Zeta- und der Gammafunktion (s. Abschnitt 6.).

Untersucht man (42) für rationale $\alpha = \frac{q}{p} > 1$ ($q > 2$), so gelangt man mittels grundlegender Eigenschaften von $\zeta(s, a)$ und der summatorischen Funktion

$$\eta_k(n) = \sum_{d|k} c_d(n)$$

der durch (28) definierten Ramanujanschen trigonometrischen Summe zu der bemerkenswerten neuen Darstellung (s. 6., Satz 10)

$$\sum_{p=1}^q \frac{1}{c(p,q)} \sum_{d|(p,q)} c_d(n) \zeta(s, \frac{p}{q}) - \sum_{\substack{1 \leq p \leq q \\ c(p,q) > 1 \\ c(p,q) | n}} \frac{1}{c(p,q)} \sum_{d|(p,q)} c_d(n) \zeta(s, \frac{p}{q}) =$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ (p,q)=1}} (\frac{p}{q})^{-s} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} \frac{\zeta(s+k)}{q^k} \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ c(p,q)=1}} p^k \quad (44)$$

mit $p, q, n \in \mathbb{N}$, $q > p$, $q > 2$, $(p, q) = \text{ggT}\{p, q\}$ und $s \in \mathbb{C}$.

Die allgemeine "Ramaswami-Formel" (44) reduziert sich für $n=1$ (s. dazu 6., Korollar zu Satz 10) und $q=3, 4, 6$ wieder auf (40), (41) und (43).

In der Literatur gibt es eine Reihe von bemerkenswerten Integraldarstellungen für die Riemannsche und die Hurwitzsche Zetafunktion, deren vielfältige Anwendungsmöglichkeiten in der Theorie der betreffenden Funktionen bekannt sein dürften (s. z.B. [39], [40], [42]).

Analoge Integralformeln für die in $\text{Re } s > 1$ durch wesentlich komplizierter strukturierte Dirichletreihen definierten Ramaswami-Funktionen $\mathcal{G}(s, \alpha)$ ($\alpha = 2, 3, 4, 6$) fehlen dagegen vollständig. In Abschnitt 7. der vorliegenden Arbeit beweisen wir u.a. unter Ausnutzung der spezifischen Lückenstruktur der Funktionalgleichung (42) neue Integralformeln vom Riemannschen (7., Satz 11) und vom Hermiteschen Typ (7., Satz 12) für die durch (42) definierte Funktion $\omega(s, \alpha)$ ($\alpha \geq 2$).

Einen tiefliegenden Einblick in das Wesen und die Bedeutung der Jensenschen Identitäten (36), (37) und (38) verdanken wir J. Hadamard. In seiner kurzen Note "Sur une propriété de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann" von 1909 ([11]) bemerkt er, daß die Riemannsche Zetafunktion unter Berücksichtigung der Grenzbedingung $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \zeta(s + \mu) = 1$ durch jede der Jensenschen Funktionalgleichungen (38) eindeutig charakterisiert wird. Einen analogen Satz vermutete er bezüglich (36) und (37). Allerdings verfügte Hadamard über keine einheitliche Methode, die seine Behauptungen und Vermutungen in ausreichendem Maße hätte stützen können.

Es ist das Verdienst von A. Dinghas ([7]) eine solche höchst originelle Methode entwickelt zu haben, die die von Hadamard aufgeworfene Eindeutigkeitsfrage nicht nur auf elegante Weise be-

antwortet, sondern ferner auch aufschlußreiche neue Erkenntnisse liefert, wie etwa, daß die Hurwitzsche Zetafunktion durch jede der Funktionalgleichungen

$$a^{-s} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \{ \zeta(s+\mu, a) - 1 \} \quad (45)$$

bzw.

$$(a+1)^{-s} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \{ \zeta(s+\mu, a+1) - 1 \} \quad (46)$$

unter Beachtung der Grenzbedingung

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} (a+1)^{s+\mu} \zeta(s+\mu, a+1) = 1$$

und auch die Eulersche Gammafunktion durch eine ganz ähnliche Funktionalgleichung eindeutig bestimmt wird (s. [7]).

Der Abschnitt 8.1. gibt einen kurzen Überblick über diesen Hadamard-Dinghasschen Ideenkreis.

In diesem Zusammenhang stellt sich die von Hadamard und Dinghas nicht diskutierte Frage, ob die Riemannsche Zetafunktion durch jede der "Lückenfunktionalgleichungen" (39) bzw. (40) bzw. (41) bzw. (43) unter Beachtung der Grenzbedingung $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \zeta(s+\mu) = 1$ ebenfalls eindeutig charakterisiert wird.

Dieses Problem wird in Abschnitt 8.2. der vorliegenden Arbeit im positiven Sinne gelöst (s. 8.2., Satz 16) und damit die Hadamard-Dinghassche Charakterisierungstheorie um einen interessanten Aspekt erweitert.

Der Beweis stützt sich auf die Dinghassche Methode. Diese ist aber nicht direkt anwendbar. Vielmehr muß ein neuer die Lückenstruktur der Funktionalgleichungen berücksichtigender Eindeutigkeitssatz für ein unendliches lineares (reelles) Gleichungssystem hergeleitet werden. Dieser "Lückensatz" (s. 8.2., Satz 17) ergibt sich durch Variation des Dinghasschen Beweises für einen ähnlichen auf das Hadamardsche Problem (s. 8.1., Satz 14) zugeschnittenen allgemeinen Satz aus der Theorie der unendlichen Gleichungssysteme (s. 8.1., Satz 15).

Abschnitt 9. der vorliegenden Arbeit behandelt einige neue Ergebnisse und Beweise aus der Transformationstheorie der Lipschitz-Lerchschen Zetafunktion.

Zunächst wird ein sich auf die Poissonsche Summenformel und eine spezielle Laplace-Transformierte stützender neuer Beweis

der Lipschitz-Formel (5) gegeben (s. 9., S. 70). Dies führt im Zusammenhang mit H. Hamburgers auf S. 3 erwähnten Äquivalenzaussagen bezüglich (2), (7) und der Poissonschen Summenformel auf die interessante Feststellung, daß jene Relationen auch äquivalent zur Lipschitz-Formel sind (s. 9., Satz 18).

Außer der berühmten Lerchschen Transformationsformel (6) sind keine weiteren Funktionalgleichungen für die Lipschitz-Lerchsche Zetafunktion $L(x, a, s)$ bekannt.

Es ist daher sicher bemerkenswert (im Kontext mit den Entwicklungen in Abschnitt 6. aber nun keineswegs mehr überraschend), daß $L(x, a, s)$ funktionalen Relationen vom Jensenschen Typ genügt. In der Tat gelten für $s \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ die neuen Funktionalgleichungen (s. 9., Satz 19)

$$(e^{2\pi i x} - 1) L(x, a, s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \{ L(x, a, s+\mu) - a^{-s-\mu} \} - a^{-s} \quad (47)$$

und

$$(1 - e^{-2\pi i x}) \{ L(x, a, s) - a^{-s} \} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \{ L(x, a, s+\mu) - a^{-s-\mu} \} - (a+1)^{-s} \quad (48)$$

Bedeutsamer als die Erkenntnis, daß (47) und (48) auch mit Hilfe der Integraldarstellung von $L(x, a, s)$ beweisbar sind (s. 9., S. 74-75) und für $x \in \mathbb{Z}$ die Dinghasschen Funktionalgleichungen (45) und (46), für $x \in \mathbb{Z}$, $a=1$ die Jensenschen Funktionalgleichungen (36) und (37) als Spezialfälle enthalten, ist die Tatsache, daß sich z.B. aus (47) die Ganzheit von $L(x, a, s)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ableiten läßt. Dies ist insofern ein neuer Gesichtspunkt, als alle in der Literatur vorkommenden Fortsetzungsbe- weise andere analytische Hilfsmittel benutzen (s. Lerch [23], Berndt [3]). Als Nebenresultat erhält man sofort die wohlbekannte Tatsache, daß die Dirichletschen L -Funktionen $L_k(s)$ zu ganzen Funktionen analytisch fortsetzbar sind (s. 9., S. 76).

Abschließend gehen wir in 9. noch auf zwei interessante arithmetische Folgerungen aus (47) bzw. (48) ein (s. 9. (15), (16) und (19)-(21)).

1. Über die Charakterisierung einer Klasse von meromorphen Funktionen durch äquivalente Funktionalgleichungen.

Die in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen $\omega(s)$ und $\eta(s)$ seien in einer festen Halbebene $\operatorname{Re} s > \alpha$ regulär.

Sei $c > \alpha$ fest gewählt und $\tau > 0$. Im folgenden wird stets der Hauptwert von z^{-s} betrachtet.

Auf der Geraden $\xi = c$ gelte

$$\omega(s) z^{-s} = o(1) \quad (|t| \rightarrow \infty). \quad (1)$$

Es gebe ein $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und ein $a \in \mathbb{R}$, so daß zwischen $\omega(s)$ und $\eta(s)$ die Funktionalgleichung

$$\omega(s) = \gamma \eta(a-s) \quad (2)$$

besteht.

Auf der Geraden $\xi = a-c$ gelte

$$\omega(s) z^{-s} = o(1) \quad (|t| \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Ferner existiere ein $T_0 > 0$ und ein $\gamma < 1$, so daß in den Halbstreifen $c_1 \leq \xi \leq c_2$, $|t| > T_0 > 0$ mit

$$\begin{aligned} c_1 &= a-c, \quad c_2 = c && \text{falls } a < 2c \\ c_1 &= c, \quad c_2 = a-c && \text{falls } a > 2c \end{aligned}$$

folgende Bedingungen gelten

$$\omega(s) z^{-s} \quad \text{ist dort regulär,} \quad (4)$$

$$\omega(s) z^{-s} = O\left(e^{\gamma \frac{\pi}{c_2 - c_1} |s|}\right) \quad \text{gilt dort gleichmäßig.}$$

Sei nun $T > T_0 > 0$. Man betrachte das Rechteck R_T mit den Ecken $c \pm iT$, $a-c \pm iT$ und das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_T} \omega(s) z^{-s} ds \quad (5)$$

über den positiv orientierten Rand ∂R_T , auf dem $\omega(s) z^{-s}$ wegen (4) regulär ist.

Aus (1), (3) und (4) folgt nach dem Prinzip von Phragmén und Lindelöf, daß die Beziehung $\omega(s) z^{-s} = o(1)$ gleichmäßig in $c_1 \leq \xi \leq c_2$, $|t| \geq T > T_0 > 0$ gilt.

Für $T \rightarrow \infty$ verschwinden also die Integrale in (5) über die beiden Horizontalseiten.

Definiert man die Funktion $\Omega(\tau)$ durch ein Integral vom Mellinschen Typus

$$\Omega(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega(s) \tau^{-s} ds, \quad (6)$$

so ist hier die Verschiebung der Integrationsabszisse von $\zeta = c$ nach $\zeta = a-c$ nach den vorangegangenen Überlegungen gestattet, wenn man die Pole von $\omega(s)\tau^{-s}$ in $c_1 \leq \zeta \leq c_2$ berücksichtigt. Nach dem Satz von Cauchy gilt also

$$\Omega(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-c-i\infty}^{a-c+i\infty} \omega(s) \tau^{-s} ds + R(\tau), \quad (7)$$

wobei $R(\tau)$ die Summe der Residua des Integranden bei seinen in $c_1 \leq \zeta \leq c_2$ gelegenen Polen bezeichnet.

Andererseits gilt aber die Funktionalgleichung (2). Ersetzt man also im Integral von (7) s durch $a-s$, so ergibt sich sofort die Transformationsformel

$$\Omega(\tau) = \frac{\tau}{z^a} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \eta(s) \tau^s ds + R(\tau). \quad (8)$$

Es bestehe nun umgekehrt die Relation (8) mit Konstanten $c > \alpha$, $\tau \in \mathbb{C} - \{0\}$ und $a \in \mathbb{R}$ und einer in $\operatorname{Re} s > \alpha$ regulären Funktion $\eta(s)$. Ferner setzen wir voraus, daß die Integrationsabszisse c im Integral von (8) ersetzt werden kann durch ζ mit $\alpha < \zeta \leq c$ und auch die Bedingungen (1), (3) und (4) unter dieser Voraussetzung gültig bleiben.

Dann gilt also nach (8) für jedes feste ζ mit $\alpha < \zeta \leq c$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} \omega(s) \tau^{-s} ds - \frac{\tau}{z^a} \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} \eta(s) \tau^{s-a} ds \quad (9)$$

Andererseits hat man nach (1), (3) und (4) und dem Prinzip von Phragmén-Lindelöf

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_T} \omega(s) \tau^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} \omega(s) \tau^{-s} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} \omega(a-s) \tau^{s-a} ds. \quad (10)$$

Hierbei ist ∂R_T der positiv orientierte Rand des Rechtecks R_T mit den Ecken $\zeta \pm iT$, $a-\zeta \pm iT$ und $T > T_0 > 0$.

Also folgt aus (9) und (10)

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{s-a} \{ \gamma(z) - \omega(a-s) \} dz = 0.$$

Das Integral konvergiert absolut in jedem festen Streifen $\alpha < \sigma \leq \sigma \leq c$ und der Integrand ist dort analytisch. Hieraus folgt nach dem Eindeutigkeitssatz für die Mellin-Transformation das Bestehen von (2), d.h.

$$\gamma(z) = \omega(a-s).$$

Somit ist gezeigt, daß die Funktionalgleichung (2) und die Transformationsformel (8) im Sinne der obigen Betrachtungen "äquivalent" sind.

Zwei einfache für die Abschnitte 2. und 5. aber durchaus nützliche Folgerungen seien angemerkt:

(I) Ist $\omega(s) = \gamma(s)$, so ist die Funktionalgleichung

$$\omega(s) = \gamma(a-s)$$

äquivalent zu

$$\Omega(z) = \gamma z^{-a} \Omega(z^{-1}) + R(z).$$

(II) Ist $\omega(s) = \gamma(s)$ ganz, so ist die Funktionalgleichung

$$\omega(s) = \gamma(a-s)$$

äquivalent zu

$$\Omega(z) = \gamma z^{-a} \Omega(z^{-1}),$$

da $R(z)$ dann verschwindet.

2. Äquivalente Relationen zu Funktionalgleichungen vom Riemannschen Typ.

Bei den hier vorgestellten Ergebnissen handelt es sich um Anwendungen der allgemeinen Entwicklungen des Abschnitts 1..

2.1. Die logarithmierte Poisson-Jacobische Thetarelation.

Sei $\tau > 0$. Die Poisson-Jacobische Thetafunktion

$$\vartheta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 \tau} > 1 \quad (1)$$

besitzt die Produktdarstellung (s. [42], S. 473)

$$\vartheta(\tau) = \prod_{n \geq 1} \{ (1 + e^{-(2n-1)\pi\tau})^2 (1 - e^{-2\pi n\tau}) \}. \quad (2)$$

Mithin folgt

$$\log \vartheta(\tau) = 2 \sum_{n \geq 1} (n-1) \frac{e^{-\pi n \tau}}{n} (e^{2\pi n \tau} - 1)^{-1} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (e^{2\pi n \tau} - 1)^{-1} \quad (3)$$

Die Integraldarstellung der Hurwitzschen Zetafunktion (s. z.B.

$$[33], \text{S. 37}) \quad \zeta(s, a) \Gamma(s) = \int_0^\infty z^{s-1} \frac{e^{-az}}{1 - e^{-z}} dz \quad (4)$$

mit $\operatorname{Re} s > 1$ und $0 < a \leq 1$ liefert für $a=1$ bzw. $a=\frac{1}{2}$ mit (3) sofort für $\operatorname{Re} s > 1$

$$\omega(s) = \int_0^\infty z^{s-1} \log \vartheta(\tau) dz,$$

wobei

$$\omega(s) = p(s) \psi(s) \quad (5)$$

und

$$p(s) = -(1-2^{1-s})(1-2^{1+s}) \quad (6)$$

$$\psi(s) = \Gamma(s) \zeta(s) \zeta(s+1) (2\pi)^{-s}.$$

Nach der 2. Mellinschen Umkehrformel (s. [6], S. 88) folgt

$$\Omega(\tau) = \log \vartheta(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega(s) \tau^{-s} ds, \quad (7)$$

wobei über die Gerade $\sigma=c>1$ integriert wird.

Nun ist $p(s)$ eine gerade ganze Funktion endlicher Ordnung mit einfachen Nullstellen in $s=\pm 1$ und $p(0) \neq 0$.

Aber $\psi(s)$ ist meromorph in $\mathbb{C}$ mit den einzigen Polen 1. Ordnung in $s=\pm 1$ und einem Pol 2. Ordnung in $s=0$.

Die Pole 1. Ordnung von $\Gamma(s)$ in $s=-n$ ($n \geq 2$) werden durch die trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ bzw. $\zeta(s+1)$ kompensiert.

Somit ist $\omega(s) \tau^{-s}$ meromorph in $\mathbb{C}$ mit einem einzigen doppelten

Pol bei $s=0$ und dem leicht berechneten Residuum

$$\operatorname{Res}_{s=0} \omega(s) z^{-s} = -\frac{1}{2} \log z.$$

Bekanntlich gilt für jedes feste ϵ und $|t| \rightarrow \infty$ (s. [42], S. 253, 275-6)

$$|\Gamma(s)| \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} |t|^{\epsilon - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \quad (8)$$

und ferner hat man

$$|\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma) \quad (\sigma \geq 1 + \delta, \delta > 0),$$

$$\zeta(s) = O(|t|^{\mu(\sigma)} \log |t|) \quad (|t| \rightarrow \infty) \quad (9)$$

mit

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma & (\sigma < 0) \\ \frac{1}{2}(1 - \sigma) & (0 \leq \sigma \leq 1) \end{cases}.$$

Somit besteht auf jeder festen Geraden $\sigma = c > \sigma = 1$ die Beziehung 1.(1).

Daß die Funktion $\Psi(s)$ eine gerade Funktion ist, beweist man leicht mit Hilfe der Riemannschen Funktionalgleichung

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \quad (10)$$

und der Eulerschen Funktionalgleichung

$$s \Gamma(s) = \Gamma(s+1). \quad (11)$$

Also ist auch $\omega(s)$ eine gerade Funktion, d.h. es besteht die Funktionalgleichung 1.(2) mit $a=0$ und $\gamma=1$

$$\omega(s) = \omega(-s),$$

was sofort die Gültigkeit von 1.(3) nach sich zieht.

Mit $c_1 = -c$, $c_2 = c$ ergibt sich damit nach den vorangegangenen Bemerkungen auch 1.(4).

Somit gilt nach 1.(I) der

Satz 1

Die Funktionalgleichung

$$\omega(s) = \omega(-s) \quad (12)$$

ist äquivalent zur logarithmierten Poisson-Jacobischen Transformationsformel

$$\log \mathfrak{J}(z) = -\frac{1}{2} \log z + \log \mathfrak{J}(z^{-1}). \quad (13)$$

2.2. Hardy-Ramanujansche Identitäten

Es gilt die von Ramanujan stammende, von G.H. Hardy 1928 ([14]) bewiesene Transformationsformel:

Für $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha\beta = \pi^2$ ist

$$\alpha^k \left\{ \frac{1}{2} J(1-2k) + \sum_{n \geq 1} \frac{n^{2k-1}}{e^{2\alpha n} - 1} \right\} - (-\beta)^k \left\{ \frac{1}{2} J(1-2k) + \sum_{n \geq 1} \frac{n^{2k-1}}{e^{2\beta n} - 1} \right\} = 0 \quad (14)$$

Den Fall $k=1$, für den (14) falsch ist, hat Hardy in ([14]) nicht untersucht. Andererseits findet sich in Ramanujans "Notebooks" ([26], 2; S. 170) ohne Beweis die dem Grenzfall $k=1$ von (14) entsprechende Formel:

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha\beta = \pi^2$ ist

$$\alpha \sum_{n \geq 1} n \{ \coth n\alpha - 1 \} + \beta \sum_{n \geq 1} n \{ \coth n\beta - 1 \} = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha + \beta}{12}. \quad (15)$$

Wir beweisen hier den allgemeineren

Satz 2

Für $\tau > 0$ setze man

$$\Omega(\tau) = \tau \sum_{n \geq 1} \frac{e^{2\pi n \tau}}{(e^{2\pi n \tau} - 1)^2}. \quad (16)$$

Dann ist die Transformationsformel

$$\Omega(\tau) + \Omega(\tau^{-1}) = \frac{1}{24} \{ \tau + \tau^{-1} \} - \frac{1}{4\pi} \quad (17)$$

äquivalent zu der Funktionalgleichung

$$\omega(s) = -\omega(-s) \quad (18)$$

mit

$$\omega(s) = s \psi(s) \quad (19)$$

und

$$\psi(s) = J(s) \Gamma(s) J(s+1) (2\pi)^{-s}. \quad (20)$$

Beweis:

Wir betrachten die bekannte Mellin-Transformierte

$$(e^z - 1)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) J(s) z^{-s} ds \quad (z > 0)$$

mit $c > 1$.

Differentiation nach dem Parameter z unter dem Integralzeichen ist erlaubt und eine offensichtliche Substitution führt, wenn

man beachtet, daß Summation und Integration vertauschbar sind, sofort zu

$$2\pi \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega(s) z^{-s} ds.$$

Die für unsere Belange notwendigen Eigenschaften der Funktion $\Psi(s)$ sind in 2.1. eingehend untersucht worden.

Der Faktor s in (19) bewirkt hier, daß $\omega(s)$ in $\mathbb{C}$ meromorph ist mit den einzigen einfachen Polen bei $s=0, \pm 1$.

Die Berechnung der Residua von $\omega(s)z^{-s}$ bei diesen Singularitäten bereitet keine Schwierigkeit.

Daß $\omega(s)$ der Funktionalgleichung (18) genügt ist klar, da $\Psi(s)$ nach 2.1. eine gerade Funktion von s ist.

Also gilt 1.(2) mit $\gamma=-1$ und $a=0$.

Nach 1.(I) folgt mithin die Behauptung.

Der Übergang von (17) zu (15) ergibt sich leicht mittels der Identität

$$\sum_{n \geq 1} (x^n - 1)^{-2} = \sum_{n \geq 1} (n-1)(x^n - 1)^{-1} \quad (x > 1)$$

Setzt man $z=1$ in (17), so folgt die Ramanujansche Formel [26], 2; S.170)

$$\sum_{n \geq 1} n \{ \coth \pi n - 1 \} = \frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi}. \quad (21)$$

Andererseits ist klar, daß (17) auch für $\operatorname{Re} z > 0$ gilt (analytische Fortsetzung!). Setzt man dort beispielsweise $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$, also $z\bar{z} = 1$, so ergibt eine einfache Rechnung die von Rao und Aiyar bzw. von Lewittes stammende Formel (s. [4], S.159)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(-1)^n e^{\pi n \sqrt{3}} - 1} = \frac{1}{24} - \frac{1}{4\pi \sqrt{3}}. \quad (22)$$

Analog zu (14) gilt die Ramanujansche Formel:

Für $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha\beta = \pi^2$ ist

$$\alpha^{-k} \left\{ \frac{1}{2} \zeta(2k+1) + \sum_{n \geq 1} \frac{n^{-2k-1}}{e^{2n\alpha} - 1} \right\} - (-\beta)^{-k} \left\{ \frac{1}{2} \zeta(2k+1) + \sum_{n \geq 1} \frac{n^{-2k-1}}{e^{2n\beta} - 1} \right\} =$$

$$= 2^{2k} \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{B_{2k+2-2n}}{(2k+2-2n)!} \alpha^{k+1-n} \beta^n. \quad (23)$$

Die Formel (23) findet sich ohne Beweis in Ramanujans "Note-books" ([26], 1; S. 259).

Beweise von (23) haben u.a. N.S. Koshliakov [21], A.P. Guinand [10], E. Grosswald [8], B.C. Berndt ([4], s. auch hier die umfangreichen Literaturangaben) gegeben.

Aus theoretischer Sicht ist im Gegensatz zu (14) der Summand $\frac{1}{2} \zeta(2k+1)$ in (23) hier ohne Bedeutung, denn es gilt

$$\coth x = 1 + 2(e^{2x} - 1)^{-1} \quad (x > 0).$$

In Anbetracht der Tatsache, daß alle bekannten Beweise von (23) doch in erheblichem Maße von den grundlegenden Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion - also beispielsweise: Riemannsche Funktionalgleichung, Werte von $\zeta(s)$ an den Stellen $s=1-2k, 2k$ ($k \geq 0$), grobe 0-Resultate - abhängen, erscheint es sinnvoll, eine neue Beweismethode von (23) zu erwähnen, die außer der Definition von $\zeta(s)$ durch ihre Dirichletreihe in $\operatorname{Re} s > 1$ überhaupt keine Informationen über die Riemannsche Zetafunktion benutzt und gleichzeitig die bekannte Eulersche Formel für $\zeta(2k)$ liefert.

Es gilt nämlich:

Für $z > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ setze man

$$\Omega(z, k) = \sum_{n \geq 1} n^{-2k-1} \coth \pi z n \quad (24)$$

und

$$\mathfrak{L}(z, k) = (2\pi)^{2k+1} \sum_{\mu=0}^{k+1} (-1)^{\mu+1} \frac{B_{2\mu}}{(2\mu)!} \frac{B_{2(k+1-\mu)}}{(2(k+1-\mu))!} z^{2(k-\mu)+1}. \quad (25)$$

Dann gilt die Transformationsformel

$$-\Omega(z, k) + (-1)^{k-1} z^{2k} \Omega(z^{-1}, k) = \mathfrak{L}(z, k). \quad (26)$$

Differenziert man (26) nach z und setzt dann $z=1$, so erhält man (s. auch [8]) unter Beachtung der Trivialität

$$J(2k+1) = \sum_{n \geq 1} n^{-2k-1} \coth \pi n - \sum_{n \geq 1} n^{-2k-1} \{ \coth \pi n - 1 \} \quad (27)$$

somit:

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$J(2k+1) = \pi^{2k+1} \Gamma_{2k+1} - R_k \quad (28)$$

mit rationalem

$$\Gamma_{2k+1} = \frac{2^{2k}}{k} \sum_{\mu=0}^{k+1} (-1)^{k+\mu} \frac{B_{2\mu}}{(2\mu)!} \frac{B_{2(k+1-\mu)}}{(2(k+1-\mu))!} (2(k-\mu)+1), \quad (29)$$

und dem "Restglied"

$$R_k = \sum_{n \geq 1} n^{-2k-1} \{ \coth \pi n - 1 \} + (-1)^{k+1} \frac{2\pi}{k} \sum_{n \geq 1} n^{-2k} \frac{e^{2\pi n}}{(e^{2\pi n} - 1)^2} \quad (30)$$

Der Beweis von (26), der an anderer Stelle in einem größeren Zusammenhang ausführlich behandelt werden soll, stützt sich auf die Beobachtung, daß der Cauchysche Residuensatz auf die in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion

$$f(z) = z^{-k} \cot \alpha z \cdot \coth \beta z \quad (31)$$

anwendbar ist. Hierbei ist $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

Betrachtet man andererseits die Funktion

$$g(z) = z^{-k} \cot \alpha z \{ \coth \beta z - 1 \}, \quad (32)$$

so erhält man auf dem gleichen Wege die oben schon erwähnte bekannte Eulersche Formel

$$J(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}, \quad (33)$$

wobei B_{2k} die $2k$ -te Bernoullische Zahl ist.

Eulers Vermutung von 1740 (De Seribus Quibusdam Considerationes), daß

$$J(2k+1) = \Phi \cdot \pi^{2k+1}, \quad (34)$$

wobei Φ eine Funktion von $\log 2$ ist, ist bis heute unbewiesen.

Setzt man in (26) $z=1$ und $k=1$ bzw. $k=3$, so folgen die berühmten Ramanujanschen Identitäten (s. [26], S. 261)

$$\sum_{n \geq 1} n^{-3} \coth \pi n = \frac{7}{180} \pi^3 \quad (35)$$

bzw.

$$\sum_{n \geq 1} n^{-7} \cot \pi n = \frac{19}{56700} \pi^7. \quad (36)$$

Man beachte ferner, daß (26) natürlich auch in $\operatorname{Re} z > 0$ gültig ist, womit sich eine ganze Reihe anderer spezieller Modultransformationen ergibt, auf die wir aber hier nicht eingehen wollen (s. z.B. [4], Proposition 2.5, S.154).

Für $k=0$ gilt (23) nicht mehr. In Ramanujans "Notebooks" ([26], 1; S.255) findet sich aber ohne Beweis die diesen Grenzfall entsprechende Identität (s. u.a. auch [4], S.160; [9]):

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha\beta = \pi^2$ ist

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (e^{2\pi n} - 1)^{-1} - \frac{1}{4} \log \alpha + \frac{\alpha}{12} = \\ & = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (e^{2\pi n} - 1)^{-1} - \frac{1}{4} \log \beta + \frac{\beta}{12} \end{aligned} \quad (37)$$

Wir wollen hier mit Hilfe der Analysis aus 1. die folgende weitergehende Tatsache beweisen:

Satz 3

Für $z > 0$ setze man

$$\Omega(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (e^{2\pi n z} - 1)^{-1}. \quad (38)$$

Dann ist die Transformationsformel

$$\Omega(z) - \Omega(z^{-1}) = \frac{1}{2} \log z - \frac{\pi}{12} \{z - z^{-1}\} \quad (39)$$

äquivalent zu der Funktionalgleichung

$$\Psi(s) = \Psi(-s) \quad (40)$$

mit

$$\Psi(s) = \zeta(s) \Gamma(s) \zeta(s+1) (2\pi)^{-s}. \quad (41)$$

Beweis:

Wir betrachten wieder die Mellin-Transformierte

$$(e^x - 1)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \zeta(s) x^{-s} ds$$

mit $c > 1$ und $x > 0$.

Hieraus folgt sofort für $z > 0$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Psi(s) z^{-s} ds$$

Die Berechnung der Residua von $\Psi(s)z^{-s}$ bei den einfachen Polen $s=\pm 1$ und dem doppelten Pol bei $s=0$ ist problemlos. Die Untersuchungen in 2.4. und 1.(I) liefern nun die Behauptung.

Natürlich gilt (39) auch in $\operatorname{Re} z > 0$ (analytische Fortsetzung, Hauptwert von $\log z$!).

2.3 Die Ramanujansche z -Funktion

Wir betrachten die Mellin-Transformierte

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) y^{-s} ds \quad (c > 0, y > 0)$$

und substituieren $y=2\pi n z$ mit $z > 0$.

Sei $c > \alpha = \frac{13}{2}$. Dann folgt sofort

$$\Omega(z) = \sum_{n \geq 1} z(n) e^{-2\pi n z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) F(s) (2\pi)^{-s} z^{-s} ds \quad (42)$$

mit der erzeugenden Funktion

$$F(s) = \sum_{n \geq 1} z(n) n^{-s}, \quad (43)$$

wobei die Dirichletreihe in $\operatorname{Re} s > \alpha = \frac{13}{2}$ absolut konvergiert und $z(n)$ die bekannte Ramanujansche z -Funktion bezeichnet, die durch die Relation

$$\sum_{n \geq 1} z(n) z^n = z \prod_{n \geq 1} (1 - z^n)^{24} \quad (|z| < 1) \quad (44)$$

definiert wird.

Man kann zeigen (s. [17], S. 173), daß $F(s)$ eine ganze Funktion ist mit den in $\sigma < \frac{11}{2}$ einzigen sog. "trivialen" Nullstellen in den Polen von $\Gamma(s)$: $s=0, -1, -2, \dots$

Also ist auch die Funktion

$$\omega(s) = \Gamma(s) F(s) (2\pi)^{-s} \quad (45)$$

im Integranden von (42) eine ganze Funktion.

Nun genügt $\omega(s)$ der Funktionalgleichung (s. [17], S. 171,

(10.8.6.))

$$\omega(s) = \omega(12-s), \quad (46)$$

d.h., es besteht 1.(2) mit $\gamma^* = 1$ und $a=12$.

Auf jeder festen Geraden $\sigma = c > \frac{13}{2}$ gilt 1.(1), wegen der Funktionalgleichung (46) hat man auch 1.(3) und 1.(4) ist ebenfalls erfüllt, da $\omega(s)$ von endlicher Ordnung ist.

Nach 1.(II) hat man also den

Satz 4

Die Funktionalgleichung

$$\omega(s) = \omega(12-s) \quad (47)$$

mit

$$\omega(s) = \Gamma(s) F(s) (2\pi)^{-s} \quad (48)$$

und der in der Halbebene $\operatorname{Re} s > \frac{13}{2}$ durch die Dirichletreihe definierte ganzen Funktion

$$F(s) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) n^{-s}, \quad (49)$$

wobei $\tau(n)$ die Ramanujansche τ -Funktion bezeichnet, ist äquivalent zu der Funktionalgleichung

$$\Omega(\tau) = \tau^{-12} \Omega(\tau^{-1}) \quad (\tau > 0) \quad (50)$$

mit

$$\Omega(\tau) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) e^{-2\pi n \tau}. \quad (51)$$

3. Spezielle Ramanujan-Entwicklungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Wertbestimmung von absolut konvergenten Reihen der Form

$$\sum_{q \geq 1} a_q R(c_q(n)), \quad (1)$$

wobei $R(c_q(n))$ eine rationale Funktion der Ramanujanschen Summe

$$c_q(n) = \sum_{h \in \mathcal{R}(q)} e^{-2\pi i n h/q} = \sum_{h \in \mathcal{R}(q)} \cos[2\pi n h/q] \quad (2)$$

($h \in \mathcal{R}(q)$ bedeutet, daß h ein vollständiges, primes, reduziertes Restsystem modulo q durchläuft) darstellt mit der Eigenschaft

$$R(c_q(n)) = O(1) \quad (q \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N} \text{ fest}), \quad (3)$$

und die a_q die Form

$$a_q = \log J(q) \cdot q^{-1} \quad (4)$$

haben.

Wegen (3) und

$$a_q = O(q^{-1-\delta}) \quad (q \rightarrow \infty, \delta > 0) \quad (5)$$

ist in der Tat die absolute Konvergenz von (1) gesichert. Insbesondere interessieren wir uns für

$$R(c_q(n)) = c_q(n), \quad (6)$$

$$R(c_q(n)) = T_q(n) = \frac{1}{2} \sum_{h \in \mathcal{R}(q)} \left\{ \frac{\sin[(c_q(n) + h)\pi/q]}{\sin \pi h/q} - 1 \right\}, \quad (7)$$

$$R(c_q(n)) = T_{q,s}(n) = \sum_{h \in \mathcal{R}(q)} \sum_{v=1}^n v^s \cos \frac{2\pi v h}{q} \quad (s \in \mathbb{C}) \quad (8)$$

und wollen den Wert der Reihe (1) für diese Fälle bestimmen. Bevor wir zur Formulierung und zum Beweis des Hauptergebnisses dieses Abschnitts (Satz 5) kommen, müssen wir noch einige von Ramanujan stammende Resultate bezüglich (6), (7) und (8) bereitstellen (s. [39], S. 10 und [27], S. 180 ff).

Die Möbius-Funktion $\mu(n)$ ist auf $\mathbb{N}$ definiert durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n=1 \\ (-1)^r & \text{falls } n=p_1 \cdots p_r; p_i \text{ Primzahl}; p_i \neq p_j \text{ f. j.} \neq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und es gilt

Lemma 1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$c_q(n) = \sum_{\substack{d|q \\ d|n}} d \mu\left(\frac{q}{d}\right). \quad (9)$$

Beweis:

Es gilt

$$\gamma_q(n) = \sum_{n=0}^{q-1} e^{-2\pi i n r/q} = \begin{cases} q & \text{falls } q|n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (10)$$

Somit hat man

$$\gamma_q(n) = \sum_{d|q} c_d(n) = \sum_{d|q} \sum_{\substack{r|d \\ r \leq d}} e^{-2\pi i n r/d}, \quad (11)$$

d.h. $\gamma_q(n)$ ist die summatorische Funktion von $c_q(n)$. Nach der Möbiusschen Umkehrformel folgt also

$$c_q(n) = \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \gamma_d(n) = \sum_{\substack{d|q \\ d|n}} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d. \quad (12)$$

Lemma 2

Für $\operatorname{Re} s > 1$ hat man mit $\zeta_s(n) = \sum_{d|n} d^s$

$$\sum_{q \geq 1} c_q(n) q^{-s} = \frac{\zeta_{1-s}(n)}{\zeta(s)}. \quad (13)$$

Beweis:

Aus (12) folgt

$$\frac{c_q(n)}{q^s} = \sum_{\substack{d|q \\ d|n}} \frac{\mu(r)}{r^s} d^{1-s}$$

Summation über $q=1,2,3,\dots$ führt zu (13), wenn man beachtet, daß nach Lemma 1 $|c_q(n)| \leq c_1(n)$ gilt.

Lemma 3

Für $\operatorname{Re} s > 0$ gelten

$$\sum_{v=1}^n c_{-s}(v) = j(s+1) \sum_{q \geq 1} T_q(n) q^{-s-1} \quad (14)$$

und

$$\sum_{v=1}^n c_s(v) = j(s+1) \sum_{q \geq 1} T_{q,s}(n) q^{-s-1}. \quad (15)$$

Beweis:

Man erkennt leicht mit Hilfe der Definitionen (6), (7), (8), daß

$$T_q(n) = \sum_{v=1}^n c_q(v), \quad T_{q,s}(n) = \sum_{v=1}^n v^s c_q(v). \quad (16)$$

Damit folgt aus Lemma 2

$$\sum_{v=1}^n \sum_{q \geq 1} c_q(v) q^{-s-1} = \sum_{q \geq 1} \frac{T_q(n)}{q^{s+1}} = \frac{1}{j(s+1)} \sum_{v=1}^n c_{-s}(v).$$

Andererseits hat man wegen

$$n^s c_{-s}(n) = c_s(n)$$

und Lemma 2

$$\sum_{v=1}^n v^s \sum_{q \geq 1} c_q(v) q^{-s-1} = \sum_{q \geq 1} \frac{T_{q,s}(n)}{q^{s+1}} = \frac{1}{j(s+1)} \sum_{v=1}^n c_s(v).$$

Die Ramanujanschen Hilfsresultate (13), (14) und (15) ermöglichen nun in Verbindung mit der Tatsache, daß nach 2.1. (7) der Logarithmus der Thetafunktion $\mathfrak{J}(x)$ durch ein Integral über die Gerade $(c-i\infty, c+i\infty)$ ($c > 1$) ausgedrückt werden kann, die angestrebte Wertbestimmung von Reihen der Form (1) mit (4) und (6), (7), (8).

Es gilt der

Satz 5

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{R}^+$ setze man

$$w(x) = \frac{1}{2} \{ 1 - 5 \coth \pi x \} + \coth \frac{\pi x}{2} + \coth 2\pi x. \quad (17)$$

Dann gelten

$$\sum_{q \geq 1} \frac{\log 2(q)}{q} c_q(n) = \sum_{d|n} w(d) \quad (18)$$

und

$$\sum_{q \geq 1} \frac{\log 2(q)}{q} T_q(n) = \sum_{v=1}^n \sum_{d|v} w(d) \quad (19)$$

und für $s \in \mathbb{C}$

$$\sum_{q \geq 1} \frac{\log 2(q)}{q} T_{q,s}(n) = \sum_{v=1}^n v^s \sum_{d|v} w(d). \quad (20)$$

Beweis:

Unter Beachtung der bekannten Mellin-Transformierten

$$(e^x - 1)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \Gamma(s) x^{-s} ds \quad (c > 1, x \in \mathbb{R}^+) \quad (21)$$

zeigt man leicht:

$$w(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p(s) \Gamma(s) \Gamma(s) (2\pi x)^{-s} ds. \quad (22)$$

Hierbei ist

$$p(s) = -(1-2^{1+s})(1-2^{1-s}). \quad (23)$$

Denn es ergibt sich für die rechte Seite von (22) nach (21):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \Gamma(s) (\pi x)^{-s} ds - \frac{5}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \Gamma(s) (2\pi x)^{-s} ds + \\ & + \frac{2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \Gamma(s) (4\pi x)^{-s} ds = \\ & = \left\{ \coth \frac{\pi x}{2} - 1 \right\} - \frac{5}{2} \left\{ \coth \pi x - 1 \right\} + \left\{ \coth 2\pi x - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Man hat nun wegen 2.1. (7)

$$\sum_{q \geq 1} \frac{\log 2(q)}{q} c_q(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p(s) \Gamma(s) \Gamma(s) \Gamma(s+1) (2\pi)^{-s} \sum_{q \geq 1} \frac{c_q(n)}{q^{s+1}} ds. \quad (24)$$

Die Vertauschung von Summation und Integration ist erlaubt.
Denn nach 2.1.(9) gilt u.a. ($|t| \rightarrow \infty, c \geq 1 + \delta, \delta > 0$)

$$|\zeta(c+it)| \leq \zeta(c)$$

und

$$|\Gamma(c+it)| = e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{c-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(t^{-1})\},$$

womit das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p(c+it)| |\zeta(c+it)| |\Gamma(c+it)| |\zeta(c+it)| (2\pi)^{-c} \sum_{q \geq 1} \frac{|c_q c_n|}{q^{c+i}} dt$$

konvergiert.

Nach (13) und (22) wird die rechte Seite von (24) zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p(s) \zeta(s) \Gamma(s) \zeta_{-s}(n) (2\pi)^{-s} ds &= \sum_{d|n} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p(s) \zeta(s) \Gamma(s) (2\pi d)^{-s} ds \\ &= \sum_{d|n} w(d). \end{aligned}$$

Analog hat man nach (14), (22):

$$\begin{aligned} \sum_{q \geq 1} \frac{\log q \cdot c_q}{q} T_{q,s}(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p(s) \zeta(s) \Gamma(s) (2\pi)^{-s} \sum_{v=1}^n \zeta_{-s}(v) ds = \\ &= \sum_{v=1}^n \sum_{d|v} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p(s) \zeta(s) \Gamma(s) (2\pi d)^{-s} ds \\ &= \sum_{v=1}^n \sum_{d|v} w(d) \end{aligned}$$

(20) kann nicht mit dieser Methode bewiesen werden, da $T_{q,s}(n)$ außer von q und n noch von s abhängt. Es ergibt sich aber (20) direkt aus der schon bewiesenen Gleichung (18) und der Definition

$$T_{q,s}(n) = \sum_{v=1}^n v^s c_q(v).$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Die Ramanujan-Entwicklung (18) liefert nun in Verbindung mit der von Ramanujan selbst stammenden für $d(n)$ und der Transformationsgleichung für die Jacobische Thetafunktion $\vartheta(\tau)$ das merkwürdige (s. auch den folgenden Abschnitt 4.)

Korollar:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $d(n) = \sum_{d|n} 1$. Dann ist

$$\sum_{q \geq 1} \frac{\log \mathfrak{D}(q^{-1})}{q} c_q(n) = \sum_{d|n} \left\{ W(d) - \frac{1}{2} \right\}. \quad (25)$$

Beweis:

Wegen (s. Einleitung, S. 8)

$$-d(n) = \sum_{q \geq 1} \frac{\log q}{q} c_q(n),$$

der Funktionalgleichung

$$\mathfrak{D}(z) = z^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{D}(z^{-1}) \quad (z > 0)$$

und (18) hat man:

$$\begin{aligned} \sum_{q \geq 1} \frac{\log \mathfrak{D}(q)}{q} c_q(n) + \sum_{q \geq 1} \frac{\log \sqrt{q}}{q} c_q(n) \\ = \sum_{q \geq 1} \frac{\log \mathfrak{D}(q^{-1})}{q} c_q(n) \\ = \sum_{d|n} W(d) - \frac{1}{2} d(n). \end{aligned}$$

4. Einige Bemerkungen über die Theorie der Ramanujan-Entwicklungen, über das Dirichletsche Teilerproblem und die Eulersche Konstante γ .

Die Ramanujan-Summen

$$c_q(n) = \sum_{h \in \mathcal{R}(q)} e^{-2\pi i h \frac{n}{q}}$$

sind periodische Funktionen, die den Orthogonalitätsrelationen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n \leq x} c_q(n) c_p(n) = \begin{cases} \mathfrak{D}(q) & q = p \\ 0 & q \neq p \end{cases}$$

genügen.

Ist eine zahlentheoretische Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, so "erwartet" man für f eine "Ramanujan-Entwicklung"

$$f(n) \sim \sum_{q \geq 1} a_q c_q(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

mit den "Entwicklungskoeffizienten"

$$a_q = \frac{1}{\mathfrak{Y}(q)} H(f c_q),$$

falls die Mittelwerte

$$H(f c_q) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) c_q(n)$$

existieren. ($\mathfrak{Y}(\cdot)$ bezeichnet die Eulersche $\mathfrak{Y}$ -Funktion). Ausgehend von den fundamentalen Arbeiten Ramanujans und Hardys ([27], [151]) haben sich eine ganze Reihe anderer Autoren mit dem Problem der Entwickelbarkeit einer beliebigen zahlentheoretischen Funktion in eine Ramanujan-Reihe beschäftigt (z.B. Carmichael, Crum, Wintner, Cohen, Delsarte, Delange, Halasz, Schwarz; s. auch die umfangreichen Literaturangaben in dem vorzüglichen Buch "Abstract Analytic Number Theory", North Holland Mathematical Library, Volume 12 (1975) von J. Knopfmacher).

Insbesondere hat sich W. Schwarz ([33], [34], [35]) in jüngster Zeit mit der Entwicklung von multiplikativen (bzw. stark multiplikativen) reell- bzw. komplexwertigen Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|f(n)| \leq 1$ in Ramanujan-Reihen befaßt und einige interessante Ergebnisse erzielt, wobei stets von der wesentlichen Voraussetzung Gebrauch gemacht wird, daß

$$H(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) \neq 0, \infty.$$

Grob formuliert handelt es sich bei der vorliegenden Problematik um die Anwendung der Ergebnisse der "harmonischen Analysis" auf die Klasse der arithmetischen Funktionen, wobei beispielsweise auch die Fourieranalysis der fastperiodischen Funktionen im Besicovitch-Schroten Sinne eine Rolle spielt.

Man kann sagen, daß sich die Theorie der Ramanujan-Entwicklungen arithmetischer Funktionen in einem relativ unbefriedi-

genden Zustand befindet. Beispielsweise läßt sich die Ramanujan-Entwicklung der multiplikativen Funktion $d(n)$:

$$d(n) = - \sum_{q \geq 1} \frac{\log q}{q} c_q(n)$$

in die bisher bekannte allgemeine Theorie nicht einordnen, da $d(n)$ noch nicht einmal einen endlichen asymptotischen Mittelwert besitzt. Denn aus der Theorie des sog. "Dirichlet-schen Teilerproblems" (s. auch weiter unten) wissen wir, daß gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} d(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log x = +\infty$$

Insbesondere folgt hieraus, daß $d(n)$ nicht fastperiodisch sein kann.

Nun liefert das Korollar zu Satz 5 (3.25) ein neues Indiz dafür, daß $d(n)$ unter Umständen einen "pathologischen Sonderfall" der allgemeinen Theorie darstellt. Denn nach 3.25) besitzt $d(n)$ eine Ramanujan-Entwicklung mit dem "Störglied"

$$2 \sum_{d|n} w(d):$$

$$d(n) = 2 \sum_{d|n} w(d) + \sum_{q \geq 1} \frac{\log q^{-2} (q^{-1})}{q} c_q(n) \quad (1)$$

Interessant dürfte auch sein, die Zusammenhänge zwischen der Transformationstheorie der elliptischen Modulfunktionen und der Theorie der Ramanujan-Entwicklungen, wie sie durch die Beweismethoden des Abschnitts 3. angedeutet werden, näher zu untersuchen.

Die Größenordnung von $d(n)$ wird hauptsächlich durch die Ramanujan-Reihe in (1) bestimmt. Denn es läßt sich zeigen, daß

$$\sum_{d|n} w(d) < \frac{1}{6} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

In der Tat ist für $x \geq 1$

$$\frac{2}{e^{4\pi x} - 1} + \frac{2e^{\pi} - 3}{e^{2\pi x} - 1} \leq w(x) \leq \frac{2}{e^{\pi x} - 1} - \frac{5e^{2\pi} + 3}{e^{4\pi x} - 1}, \quad (3)$$

denn ($x \geq 1$)

$$\frac{2}{e^{\pi x} - 1} - \frac{5}{e^{2\pi x} - 1} \geq \frac{5e^{\pi} - 3}{e^{2\pi} - 1}, \quad \frac{2}{e^{4\pi x} - 1} - \frac{5}{e^{2\pi x} - 1} \leq \frac{-3 + 5e^{2\pi}}{e^{4\pi} - 1}$$

und nach Definition von $w(x)$ (s. 3. (17)) liefert dies (3).
Damit hat man die grobe Abschätzung

$$w(x) \leq 2 \frac{x}{e^{\pi x} - 1} \quad (x \geq 1). \quad (4)$$

Nun ist nach Satz 2 mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = 2\pi$:

$$2 \sum_{n \geq 1} \frac{n}{e^{\pi n} - 1} = \frac{5}{12} - \frac{1}{\pi} - 4 \sum_{n \geq 1} \frac{2n}{e^{4\pi n} - 1} < \frac{1}{6} \quad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt (2).

Die durchschnittliche Größenordnung von $d(n)$ hat als erster Dirichlet untersucht. Er bewies:

$$D(x) = \sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta(x)$$

mit $\Delta(x) = O(x^{\frac{1}{2}})$ ($x \rightarrow \infty$).

In der Verbesserung des Restglieds $\Delta(x)$ besteht das Dirichletsche Teilerproblem.

Sei α das Infimum aller ω mit $\Delta(x) = O(x^{\omega + \varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Hardy und Landau haben bewiesen, daß $\alpha \geq \frac{1}{4}$, während Voronoi $\alpha \leq \frac{1}{3}$ zeigen konnte. Das beste bisher bekannte Resultat stammt von Kolesnik: $\alpha \leq \frac{12}{37}$ (1976). Die Vermutung $\alpha = \frac{1}{4}$ konnte bisher weder bewiesen noch widerlegt werden.

In diesem Zusammenhang ist die Chandrasekharan-Narasimhan-Identität von Interesse (vgl. K. Chandrasekharan, Arithmetical Functions, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1970, Band 167, S. 195):

$$D(x) = \frac{1}{4} + x \log x + (2\gamma - 1)x - \sum_{n \geq 1} d(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \{F_1(4\pi(n x)^{\frac{1}{2}})\} \quad (6)$$

mit $x > 1$, $x \notin \mathbb{N}$ und $F_1(x) = Y_1(x) + \frac{i}{\pi} K_1(x)$, wobei $Y_1(x)$ und $K_1(x)$ die wohlbekannten Besselfunktionen sind.

Nun folgt aus (1):

$$D(x) = 2 \sum_{n \neq x} \sum_{d|n} w(d) - 2 \sum_{q \geq 1} \frac{\log 2Cq^{-1}}{q} T_q([x]), \quad (7)$$

wobei $T_q([x])$ durch 3.(7) definiert ist.

Damit ergibt sich durch Addition von (6) und (7) für $x > 1, x \notin \mathbb{N}$:

$$D(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} W(d) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} x \log x + \frac{1}{2} (2\gamma - 1)x - \frac{1}{2} \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q} \{ d(q) (qx)^{\frac{1}{2}} F_1(4\pi (qx)^{\frac{1}{2}}) + \log d^2(q^{-1}) T_q([x]) \}. \quad (8)$$

und durch Subtraktion für die Eulersche Konstante γ die neue Darstellung ($x > 1, x \notin \mathbb{N}$)

$$\gamma = \frac{1}{2} (1 + \log \frac{1}{x}) + \frac{1}{x} \left\{ \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} W(d) - \frac{1}{8} \right\} + \frac{1}{2x} \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q} \{ d(q) (qx)^{\frac{1}{2}} F_1(4\pi (qx)^{\frac{1}{2}}) - \log d^2(q^{-1}) T_q([x]) \}. \quad (9)$$

(8) und (9) sind in ihrer Struktur sehr merkwürdig und sicher mehr von theoretischem als praktischem Interesse.

5. Über die gleichmäßige trigonometrische Approximierbarkeit analytischer Funktionen

Die ganze Funktion $L(s)$ ist in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ durch die Dirichletreihe

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (2n-1)^{-s} \quad (1)$$

definiert und genügt der Funktionalgleichung ([40], S. 66)

$$L(s) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \Gamma(1-s) \cos \frac{\pi s}{2} L(1-s). \quad (2)$$

Ferner hat man $L(0) = \frac{1}{2}$ und $L(1) = \frac{\pi}{4}$.

Wir zeigen nun

Satz 6

Für $\tau > 0$ setze man

$$\Omega(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \frac{1}{\cosh \left\{ (2n-1) \frac{\pi}{2} \tau \right\}}. \quad (3)$$

Dann besteht die Transformationsformel

$$\Omega(C) + \Omega(C^{-1}) = \frac{\pi}{8} \quad (4)$$

und diese ist äquivalent zu der Funktionalgleichung

$$\omega(s) = -\omega(-s) \quad (5)$$

mit

$$\omega(s) = \Gamma(s) L(s) L(s+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-s}. \quad (6)$$

Beweis:

Wir betrachten die Mellin-Transformierte (s. [40], S. 191)

$$\frac{1}{2 \cosh z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) L(s) z^{-s} ds \quad (c>0, z>0) \quad (7)$$

Hieraus folgt sofort

$$\Omega(C) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega(s) z^{-s} ds$$

In C hat $\omega(s) z^{-s}$ einen einzigen einfachen Pol bei $s=0$ mit dem Residuum $\frac{\pi}{8}$.

Die einfachen Pole von $\Gamma(s)$ in $s=-k$ ($k \geq 1$) werden durch die einfachen Nullstellen von $L(s)$ bzw. $L(s+1)$ in diesen Punkten kompensiert.

Unter Berücksichtigung von (2) ergibt sich leicht die Gültigkeit von (5).

Also hat man nach 1.(I) die Behauptung, wenn man beachtet, daß das bezüglich 1.(1), 1.(3) und 1.(4) geforderte asymptotische Verhalten von $L(s)$ dem von $J(s)$ entspricht.

Interessanterweise besteht zwischen der arithmetischen Aussage des Satzes 6 und den in der Tschebyscheffschen Approximationstheorie behandelten quantitativen Fragen der trigonometrischen bzw. polynomialen gleichmäßigen Approximierbarkeit analytischer Funktionen ein bislang in der Literatur wohl unberücksichtigter überraschender Zusammenhang.

Grob formuliert geht es bei den meisten Anwendungen der Tschebyscheff-Approximation darum, analytische Funktionen über einen im Analytizitätsgebiet liegenden reellen Intervall durch Polynome zu approximieren.

Es erweist sich als methodisch sinnvoll, zunächst die trigonometrische Approximation analytischer 2π -periodischer Funktionen zu betrachten und dann mittels der Substitution $w = \cos z$ auf den hier nicht behandelten polynomialen Fall überzugehen.

Bezüglich der folgenden allgemeinen Erläuterungen und der benutzten Bezeichnungsweise vgl. man das ausgezeichnete Buch "Approximationstheorie" von A. Schönhage (insbes. §8.5, S. 196 ff).

Sei $\delta > 0$ und A_δ bezeichne die Menge der reellwertigen (!) 2π -periodischen Funktionen $f(z)$, die im Streifen

$$S_\delta = \{z = x + iy \mid |y| < \delta\}$$

analytisch sind und dort der Ungleichung

$$|\operatorname{Re} f(z)| \leq 1$$

genügen.

Nun ist A_δ eine kompakte Teilmenge des Banachraums $\tilde{C}_{2\pi}$, dem Raum aller in $\mathbb{R}$ definierten stetigen 2π -periodischen reellwertigen (bzw. komplexwertigen) Funktionen; $\tilde{C}_{2\pi}$ ist normisomorph zu $\tilde{C} [0, 2\pi] = \{f \in C[a, b] \mid f(0) = f(2\pi)\}$, wobei -wie üblich- mit $C[a, b]$ der Banachraum aller über dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ stetigen reellwertigen (bzw. komplexwertigen) Funktionen f mit der Norm

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

bezeichnet wird.

Jedes $f \in A_\delta$ ist also auch Element von $\tilde{C}_{2\pi}$ und somit sind die Methoden der Tschebyscheff-Approximation auf f anwendbar.

Als "geeignetster", d.h. auch quantitativ die besten Ergebnisse liefernder Approximationsunterraum für Elemente aus $\tilde{C}_{2\pi}$ erweist sich der $2n+1$ -dimensionale Unterraum $\tilde{P}_n$ aller trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$.

Die Tschebyscheffsche Approximationsaufgabe besteht nun darin, bei festem Grad n zu $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ ein $\tilde{p} \in \tilde{P}_n$ mit minimalem Abstand

$$\|f - \tilde{p}\|$$

zu finden.

Die Existenz eines solchen Proximums $\tilde{p}$ ist trivialerweise gesichert, da $\tilde{P}_n$ endlichdimensional ist. Da $\tilde{P}_n$ ferner der Haarschen Bedingung (s. [31], S. 153) genügt, ist $\tilde{p}$ sogar eindeutig bestimmt. Diese von Tschebyscheff bewiesene Eindeutigkeitsaussage ist deshalb so bemerkenswert, weil $\tilde{C}_{2\pi}$ nicht strikt konvex ist.

Wie in der Approximationstheorie üblich bezeichnen wir die Norm des Faktorraums $\tilde{C}_{2\pi}/\tilde{P}_n$, d.h. den Abstand von $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ zu $\tilde{P}_n$ in der Norm von $\tilde{C}_{2\pi}$ mit

$$\tilde{E}_n(f) = \inf_{p \in \tilde{P}_n} \|f - p\|. \quad (8)$$

Für $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ zeigt man dann

$$\tilde{E}_n(f) = o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (9)$$

d.h., jedes $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ ist approximierbar durch Elemente aus $\bigcup_n \tilde{P}_n$.

Für beschränkte präkompakte Mengen $A \subset \tilde{C}_{2\pi}$ definiert man ihre sog. "gleichmäßige trigonometrische Approximierbarkeit" durch die Größe

$$\tilde{E}_n(A) = \sup \{ \tilde{E}_n(f) \mid f \in A \} \quad (10)$$

und zeigt auch hier

$$\tilde{E}_n(A) = o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (11)$$

Durch die über die Voraussetzung der bloßen Stetigkeit hinausgehende Forderung der Analytizität der zu approximierenden Elemente $f \in A_\delta$, läßt sich nun eine bemerkenswerte quantitative Verschärfung von (11) bezüglich der Klasse A_δ herleiten, welche von N. I. Achieser stammt (s. [31], S. 200-1).

Satz 7 (N.I. Achieser)

Die Menge A_δ der im Streifen $S_\delta = \{z = x + iy \mid |y| < \delta\}$ analytischen reellwertigen 2π -periodischen Funktionen f mit $|\operatorname{Re} f(z)| \leq 1$ für $z \in S_\delta$ besitzt die gleichmäßige trigonometrische Approximierbarkeit

$$\tilde{E}_n(A_\delta) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)} \frac{1}{\cosh\{(2m-1)(n+1)\delta\}} < \frac{8}{\pi} e^{-(n+1)\delta} \quad (12)$$

Der Zusammenhang mit Satz 6 liegt nun auf der Hand und wir können damit Achiesers Ergebnis in zwei Richtungen erweitern.

Zunächst sticht natürlich die "Unhandlichkeit" der alternierenden Reihe in (12) ins Auge und in der Tat ist das Problem ihrer geschlossenen Summierbarkeit bislang ungelöst. Aber man erkennt, daß (3) für den Fall $\tau = 1$ explizit angebar ist, womit sich (12) für den "exzeptionellen" Fall $(n+1)\delta = \frac{\pi}{2}$ berechnen läßt.

Andererseits ergibt sich aus Satz 6, daß $E_n(A_\delta)$ einer Transformationsformel genügen muß, die zu (5) äquivalent ist.

Es gilt also der

Satz 8

(i) Man definiere bei gegebenem Grad n und halber Streifenbreite $\delta > 0$ die Größe

$$\delta' = \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right)^2 \delta^{-1} \quad (13)$$

Dann gilt die "Ergänzungsformel" für die gleichmäßige trigonometrische Approximierbarkeit

$$\tilde{E}_n(A_\delta) = 1 - \tilde{E}_n(A_{\delta'}) \quad (14)$$

und diese ist äquivalent zu der Funktionalgleichung

$$G(s) = -G(-s) \quad (15)$$

mit

$$G(s) = \Gamma(s) L(s) \Gamma(s+1) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-s}, \quad (16)$$

wobei die ganze Funktion $L(s)$ in $\operatorname{Re} s > 0$ durch (1) definiert wird.

(ii) Die gleichmäßige trigonometrische Approximierbarkeit $E_n(A_\delta)$ der Klasse A_δ ist für den Fall

$$(n+1)\delta = \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

explizit angebar mit dem Wert

$$\tilde{E}_n(A_\delta) = \frac{1}{2} \quad (18)$$

Beweis:

Man setze in (3)

$$\tau = \frac{2}{\pi} (n+1)\delta > 0.$$

Dann gilt nach der Transformationsformel (4) für $\Omega(\tau)$:

$$\frac{\delta}{\pi} \Omega\left(\frac{z}{\pi}(n+1)\delta\right) = 1 - \frac{\delta}{\pi} \Omega\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\delta^{-1}\right)$$

und dieses ist nun nach dem Satz von Achieser gleichbedeutend mit

$$\tilde{E}_n(A_\delta) = 1 - \tilde{E}_n(A_{\delta^{-1}})$$

und nach Satz 6 ist dies äquivalent zu (5) mit (6).

Setzt man schließlich $\tau=1$ in (3), so folgt

$$\frac{4}{\pi} \Omega(1) = \frac{1}{2}$$

und unter Berücksichtigung der Bedingung

$$(n+1)\delta = \frac{\pi}{2}$$

folgt aus dem Satz von Achieser

$$\tilde{E}_n(A_\delta) = \frac{4}{\pi} \Omega(1).$$

Damit ist Satz 8 bewiesen.

Bemerkung zu Satz 8:

Aus der bekannten Tatsache (s. z.B. [34], S. 174), daß unter allen reellen Polynomen vom Grad $k \geq 1$ mit Hauptkoeffizient 1 das normierte Tschebyscheffpolynom zweiter Art minimale L^1 -Norm über $(-1, +1)$ hat, deren Wert 2^{1-k} ($k \geq 1$) beträgt, folgt unter Berücksichtigung von (18), daß die Menge A_δ im "exceptionellen" Fall $(n+1)\delta = \frac{\pi}{2}$ nur so gut trigonometrisch approximierbar ist wie die über $(-1, +1)$ minimale L^1 -Norm des normierten quadratischen Tschebyscheffpolynoms zweiter Art angibt!

Wie eingangs schon bemerkt, lassen sich die Ergebnisse der Sätze 7 und 8 mittels der Substitution $w = \cos z$ und geeigneter Isomorphiebetrachtungen auf die polynomiale Approximierbarkeit regulärer Funktionen f übertragen. Dies wird an anderer Stelle ausführlich geschehen.

6. Die Funktionalgleichungen von Jensen und Ramaswami

Es soll zunächst aus zwei einfachen Formeln eine Reihe von Funktionalgleichungen für die Riemannsche Zetafunktion hergeleitet werden, die von J.L.W.V. Jensen ([19]) und V. Ramaswami ([28]) stammen.

Beachtet man, daß nach dem Binomialtheorem für alle $s \in \mathbb{C}$ die Entwicklungen

$$f(1+x^{-1}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{-s}{\mu} x^{-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{s+\mu-1}{\mu} x^{-\mu}$$

und

$$f(1-x^{-1}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{-s}{\mu} x^{-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{s+\mu-1}{\mu} x^{-\mu}$$

gelten, wobei

$$f(x) = e^{-s \log x} \quad (\log x \in \mathbb{R}!)$$

gesetzt wird ($x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$) und ferner für $\mu = 0, 1, 2, \dots$

$$f^{(\mu)}(\infty) = (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)} x^{-s-\mu}$$

ist, so erhält man offensichtlich einerseits

$$f(x) \{f(1-x^{-1}) - 1\} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{f^{(\mu)}(\infty)}{\mu!} \quad (1)$$

und andererseits

$$f(x) \{f(1+x^{-1}) - 1\} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{f^{(\mu)}(\infty)}{\mu!} \quad (2)$$

Summiert man in (1) bzw. (2) über $x = 2, 3, \dots$, so folgt für alle $s \in \mathbb{C}$

$$1 = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \{ \zeta(s+\mu) - 1 \} \quad (3)$$

bzw. (nach Multiplikation von (2) mit -1)

$$2^{-s} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \{ \zeta(s+\mu) - 1 \} \quad (4)$$

In der Tat gelten (3) und (4) in der ganzen Ebene, was bezüglich (3) schon von E. Landau ([22]) und C.L. Siegel ([36]) mit unterschiedlichen Methoden nachgewiesen worden ist.

Zum Beweis der Gültigkeit von (4) in der ganzen Ebene beachte man zunächst, daß für $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$ die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \right| \sum_{n=2}^{\infty} n^{-\sigma-\mu}$$

konvergiert. Dies folgt aus

$$\left| \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \right| \leq C \cdot 2^{-\mu} \left(\frac{-|s|}{\mu} \right)$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\sigma-\mu} < 2^{-\sigma-\mu} + \int_2^{\infty} t^{-\sigma-\mu} dt < \frac{\sigma+1}{\sigma} 2^{-\mu},$$

womit man als konvergente Majorante die Binomialreihe

$$\text{Const.} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{-|s|}{\mu} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{\mu}$$

bekommt.

Für $\operatorname{Re} s > 1 - \mu$ ($\mu = 1, 2, \dots$) ist die Funktion

$$\omega(s+\mu) = \zeta(s+\mu) - 1$$

durch die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s-\mu}$$

definiert und es gilt

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} 2^{s+\mu} \omega(s+\mu) = 1.$$

Setzt man also

$$c_{\mu}(s) = c_{\mu} = C \cdot 2^{-\mu-1} \cdot \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \omega(s+\mu),$$

dann erhält man

$$\frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{\mu}}{c_{\mu+1}} \right| = 1$$

und dies gilt sogar gleichmäßig bezüglich s in jedem beschränkten Gebiet der s -Ebene, woraus man auf die gleichmäßige und absolute Konvergenz der Reihe in (4) für jedes solche Gebiet schließt. Damit liefert die Funktionalgleichung (4) die analytische Fortsetzung der Funktion

$$s \zeta(s+1)$$

in die ganze s -Ebene und (4) gilt überall.

Eine andere Beweismethode der Identitäten (3) und (4) stützt sich auf die Eulersche Darstellung der Gammafunktion und die Integraldarstellung der Riemannschen Zetafunktion. Das Binomialtheorem spielt hier keine Rolle. Aus der wohlbekannten Formel (s. z.B. [39], S.18)

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s-1} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} s > 0)$$

schließt man einerseits ($\operatorname{Re} s > 0$)

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \left\{ \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x} \right\} (e^x - 1) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \frac{1}{\Gamma(s+k)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{x^{s+k-1}}{e^x - 1} dx - \int_0^{\infty} \frac{x^{s+k-1}}{e^x} dx \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \{ \zeta(s+k) - 1 \} \end{aligned}$$

und andererseits ($\operatorname{Re} s > 0$)

$$\begin{aligned} 2^{-s} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \left\{ \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x} \right\} (1 - e^{-x}) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \frac{1}{\Gamma(s+k)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{x^{s+k-1}}{e^x - 1} dx - \int_0^{\infty} \frac{x^{s+k-1}}{e^x} dx \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \{ \zeta(s+k) - 1 \}. \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Integral- und Summenzeichen ist offensichtlich erlaubt, während der Übergang von der vorletzten zur letzten Zeile in beiden Fällen wegen der für $\operatorname{Re} s > 1 - \mu$ ($\mu = 0, 1, \dots$) gültigen Integraldarstellung (s. z.B. [39], S. 18)

$$\zeta(s+\mu) \Gamma(s+\mu) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s+\mu-1}}{e^x - 1} dx \quad (5)$$

gerechtfertigt ist.

Aus (3) und (4) folgen

$$1 = \sum_{\mu=2}^{\infty} \{ \zeta(\mu) - 1 \} \quad (6)$$

und

$$\frac{3}{4} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \{ \zeta(2\mu) - 1 \} \quad (7)$$

(7) ist insofern bemerkenswert, als die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{\mu-1} \frac{B_{2\mu}}{(2\mu)!} 2^{2\mu-1} \pi^{2\mu} - 1 \right\}$$

von transzendenten Zahlen rational ist ($B_{2\mu}$ sind die geraden Bernoullizahlen).

Auch die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \{ \zeta(2\mu+1) - 1 \}$$

ist rational mit dem Wert $\frac{1}{4}$, wie man unschwer (6) und (7) entnimmt.

Wir kehren nun wieder zu den grundlegenden Formeln (1) und (2) zurück, aus denen sich weitere Folgerungen ziehen lassen. So ergibt sich aus (1) und (2) sofort:

Satz 9

Die Hurwitzsche Zetafunktion $\zeta(s, a)$ genügt für $\alpha > 1$, und $s \in \mathbb{C}$ den Funktionalgleichungen

$$\alpha^{-s} \left\{ \zeta(s, \frac{\alpha-1}{\alpha}) - \zeta(s) \right\} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{f^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} \zeta(s+\mu) \quad (8)$$

und

$$1 - \alpha^{-s} \{ J(s) - J(s, \frac{\alpha+1}{\alpha}) \} = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{f^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} J(s+\mu). \quad (9)$$

Das Paar (8) und (9) erzeugt für $\alpha=2$ die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} J(s)(1-2^{1-s}) &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{\mu!} \frac{J(s+\mu)}{2^{s+\mu}} \\ &= 1 - \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{\mu!} \frac{J(s+\mu)}{2^{s+\mu}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Identitäten (3), (4) und (10), die sämtlich in der ganzen s -Ebene gelten, entdeckte zuerst J.L.V.W. Jensen ([19]). Satz 9 gestattet einen (allerdings begrenzten) Einblick in die Struktur der von V. Ramaswami ([28]) gefundenen "Lückenfunktionalgleichungen" für die Riemannsche Zetafunktion. Die Addition von (8) und (9) liefert nämlich ($s \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} \omega(s, \alpha) &= 1 + \alpha^{-s} \{ J(s, \frac{\alpha-1}{\alpha}) + J(s, \frac{\alpha+1}{\alpha}) \} - 2\alpha^{-s} J(s) \\ &= 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}} \frac{f^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} J(s+\mu) \end{aligned} \quad (11)$$

und unter Beachtung der für $\operatorname{Re} s > 1$ $J(s)$ definierenden Reihe erhält man hieraus die folgenden "Ramaswami-Lückenfunktionalgleichungen" (s. [28], S. 167-8):

$$\omega(s, 2) = 2 J(s)(1-2^{1-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{\mu!} \frac{J(s+\mu)}{2^{s+\mu}} \quad (12)$$

$$\omega(s, 3) = J(s)(1-3^{1-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{\mu!} \frac{J(s+\mu)}{3^{s+\mu}} \quad (13)$$

$$\omega(s, 6) = J(s)(1-2^{-s}-3^{-s}-6^{-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)} \frac{1}{\mu!} \frac{J(s+\mu)}{6^{s+\mu}} \quad (14)$$

Es ist bemerkenswert, daß Ramaswami für $\alpha=4$ keine Funktionalgleichung angegeben hat.

In der Tat gilt aber unter Berücksichtigung der $\zeta(s, a)$ in $\operatorname{Re} s > 1$ definierenden Dirichletreihe einerseits

$$1 + 4^{-s} \left\{ \zeta(s, \frac{3}{4}) + \zeta(s, \frac{5}{4}) \right\} - 2 \cdot 4^{-s} \zeta(s) \\ = \zeta(s) (1 - 2^{-s} - 2 \cdot 4^{-s})$$

und nach (11) also die neue Lückenfunktionalgleichung ($s \in \mathbb{C}$)

$$\omega(s, 4) = \zeta(s) (1 - 2^{-s} - 2 \cdot 4^{-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in 2\mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{\zeta(s+\mu)}{4^{s+\mu}} \quad (15)$$

Als erste Anwendung von (11) sei die merkwürdige Tatsache angeführt, daß sich allein aus (13) und (14) auf höchst einfache Weise für den Bereich

$$\operatorname{Re} s \in [\frac{1}{2}, 1], \quad |s| \leq 8$$

die Ungleichung

$$|\omega(s, 6) - 2^{-s-4} \omega(s, 3)| > 0 \quad (16)$$

zeigen läßt ([28], S. 168). Denn es gilt

$$\omega(s, 6) - 2^{-s-4} \omega(s, 3) = 1 - K(s)$$

mit

$$K(s) = \frac{1}{2^{s+4}} - \left[\frac{5(s+1)}{6^{s+2}} \frac{3}{4} \zeta(s+2) \right] - 2 \sum_{\substack{\mu \in 2\mathbb{N} \\ \mu \geq 6}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{\zeta(s+\mu)}{6^{s+\mu}} + \\ + \frac{2}{2^{s+4}} \sum_{\substack{\mu \in 2\mathbb{N} \\ \mu \geq 6}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{\zeta(s+\mu)}{3^{s+\mu}}$$

und

$$|K(s)| \leq \frac{1}{22} + \frac{38}{44} + \frac{2}{150} + \frac{7,7}{128} < 1$$

Wie man sieht, bewirkt der Faktor 2^{-s-4} die Elimination des Gliedes

$$2 \frac{5(s+1)(s+2)(s+3)}{4!} \frac{\zeta(s+4)}{6^{s+4}}$$

und ermöglicht damit die gewünschte Abschätzung von (16). Im Hinblick auf die Riemannsche Vermutung ist es fraglich, ob die Simplität dieser Methode ausreicht, bessere Ergebnisse zu erzielen. Spekulationen dieser Art sind aber in

der Tat belanglos, da "man über die wirklichen Schwierigkeiten eines Problems nichts aussagen kann, bevor man es gelöst hat" (C.L. Siegel, Transzendente Zahlen, BI-Hochschultaschenbuch, S.72).

Andererseits läßt sich mit Hilfe der summatorischen Funktion $\gamma_q(n)$ der Ramanujanschen trigonometrischen Summe $c_q(n)$, die uns schon im Abschnitt 3 (s. S. 28, Beweis von Lemma 1) beschäftigt hat, eine weitere interessante allgemeine, die Ramaswami-Identitäten (13), (14) und (15) enthaltende Formel herleiten. Dieses neue Resultat formulieren wir in

Satz 10

Seien $p, q \in \mathbb{N}$ mit $q > p$, $q > 2$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{p=1}^q \frac{1}{(p, q)} \sum_{d|(p, q)} c_d(n) J(s, \frac{p}{q}) - \sum_{\substack{1 \leq p \leq q \\ (p, q) > 1 \\ (p, q) | n}}^* \frac{1}{(p, q)} \sum_{d|(p, q)} c_d(n) J(s, \frac{p}{q}) = \quad (17)$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ (p, q) = 1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{-s} + 2 \sum_{k \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \frac{J(s+k)}{q^k} \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ (p, q) = 1}} p^k$$

($\sum^*$ verschwindet für $n=1$ und (p, q) bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler von p und q).

Beweis:

Wir schreiben (11) in der Form

$$J(s, 1 - \alpha^{-1}) + J(s, 1 + \alpha^{-1}) = 2 \sum_{k \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \frac{J(s+k)}{\alpha^k} \quad (18)$$

und betrachten speziell $1 < \alpha = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ mit $q > 2$.

Trivialerweise gelten die Beziehungen

$$\sum_{\substack{\frac{q}{2} < p \leq q \\ (p, q) = 1}} J(s, \frac{p}{q}) = \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ (p, q) = 1}} J(s, 1 - \frac{p}{q})$$

und

$$J(s, a) - J(s, a+1) = a^{-s} \quad (s \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}^+)$$

Also hat man für die linke Seite von (18):

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ (p, q) = 1}} \left\{ J(s, 1 - \frac{p}{q}) + J(s, 1 + \frac{p}{q}) \right\} = \\ &= \sum_{\substack{\frac{q}{2} < p \leq q \\ (p, q) = 1}} J(s, \frac{p}{q}) + \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ (p, q) = 1}} J(s, \frac{p}{q}) - \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ (p, q) = 1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{-s} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq q \\ (p, q) = 1}} J(s, \frac{p}{q}) - \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ (p, q) = 1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{-s}. \end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt

$$\sum_{\substack{1 \leq p \leq q \\ (p, q) = 1}} J(s, \frac{p}{q}) = q^s \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ (p, q) = 1}} p^{-s} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} \frac{J(s+k)}{q^k} \sum_{\substack{1 \leq p \leq \frac{q}{2} \\ (p, q) = 1}} p^k \quad (19)$$

Die linke Seite von (19) soll nun noch umgeformt werden.

Für $k \in \mathbb{N}$ hat man (s. J.28, Beweis zu Lemma 1)

$$\eta_k(n) = \sum_{d|k} c_d(n) = \begin{cases} k & \text{falls } k|n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

somit gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq p \leq q \\ (p, q) = 1}} J(s, \frac{p}{q}) = \\ &= \sum_{p=1}^q \frac{1}{(p, q)} \eta_{(p, q)}(n) J(s, \frac{p}{q}) - \sum_{\substack{1 \leq p \leq q \\ (p, q) > 1 \\ (p, q) | n}}^* \frac{1}{(p, q)} \eta_{(p, q)}(n) J(s, \frac{p}{q}), \end{aligned} \quad (20)$$

wobei $\sum^*$ für $n=1$ verschwindet.

(19) zusammen mit (20) liefert die Behauptung (17).

Den einfachsten Fall von (17), nämlich $n=1$, behandelt das Korollar

Es gilt für alle $s \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 2$:

$$J(s) \sum_{d|q} \mu(d) d^{-s} = \sum_{1 \leq p \leq \frac{q}{2}} p^{-s} + 2 \sum_{p \in 2M \cup \{q\}} \frac{\Gamma(s+p)}{\Gamma(s)!} \frac{J(s+p)}{q^{s+p}} \sum_{1 \leq p \leq \frac{q}{2}} p^k \quad (21)$$

$C(p, q) = 1$

Beweis:

Man setze in (17) $n=1$. Es ist für $k \in \mathbb{N}$ stets $C_k(1) = \mu(k)$ und

$$\eta_k(1) = \sum_{d|k} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } k=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ferner hat man $\sum^* = 0$. Also folgt für die linke Seite von (17)

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^q \frac{1}{C(p, q)} \sum_{d|C(p, q)} \mu(d) J(s, \frac{p}{q}) &= \sum_{p=1}^q \sum_{d|p, d|q} \mu(d) J(s, \frac{p}{q}) = \\ &= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{m=1}^{\frac{q}{d}} J(s, \frac{md}{q}) \end{aligned} \quad (22)$$

Andererseits gilt -wie man leicht zeigt- für $a \in \mathbb{R}^+$, $q \in \mathbb{N}$ $s \in \mathbb{C}$ die Formel

$$J(s, aq) = \sum_{v=0}^{q-1} q^{-s} J(s, a + \frac{v}{q}) \quad (23)$$

Aus (23) folgt ($a=q^{-1}$, $q \in \mathbb{N}$):

$$J(s) = q^{-s} \sum_{v=0}^{q-1} J(s, \frac{v+1}{q}) = q^{-s} \sum_{v=1}^q J(s, \frac{v}{q}) \quad (24)$$

Mithin wird (22) nach (24) zu

$$J(s) q^s \sum_{d|q} \mu(d) d^{-s}$$

und somit folgt die Behauptung (21) des Korollars.
Setzt man in (21) $q=3,4$ und 6 so ergeben sich die Identitäten (13), (14) und (15).

7. Integraldarstellungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Integraldarstellungen vom Riemannschen, Hermiteschen und Mellinschen Typ für die durch 6. (11) definierte Funktion $\psi(s, \alpha)$.

Hat die allgemeine Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

mit

$$a_n \in \mathbb{C}, \lambda_n = \log \lambda_n, \lambda_n \in \mathbb{R}^+, \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty, \quad s = \sigma + it \in \mathbb{C}$$

die Konvergenzabszisse $\sigma > 0$, dann gilt der allgemeine Darstellungssatz ([16], S.11):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} dx. \quad (2)$$

Als einfache Spezialfälle ergeben sich aus (2) -unter Benutzung der geometrischen Reihe mit $q = e^{-x}$ ($x > 0$)- die bekannten Resultate

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (\sigma > 1) \quad (3)$$

und

$$\zeta(s)(1-2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx \quad (\sigma > 0) \quad (4)$$

(4) läßt sich auch mit Hilfe der Jensenschen Funktionalgleichung 6. (10) beweisen. Beachtet man neben 6. (5).

daß (wegen [41], S.45) die Vertauschung der Summation und Integration erlaubt ist, so ergibt sich aus 6.(10):

$$\zeta(s)(1-2^{1-s}) = \frac{1}{\Gamma(s)2^s} \int_0^\infty x^{s-1} \frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{e^x - 1} dx \quad (s > 0)$$

und durch die Substitution $y = \frac{x}{2}$ im Integral folgt die Darstellung (4) sofort.

Wie 6.(11) zeigt ist es nicht möglich, die Funktion $\omega(s, \alpha)$ nur durch eine einzige, einfach gebaute Dirichletreihe vom Typ (1) darzustellen, so daß die Anwendung von (2) zur Erzeugung von Integraldarstellungen in geschlossener Form des Typs (3) oder (4) für $\omega(s, \alpha)$ sehr mühselig ist.

In diesem Zusammenhang erweist sich die Funktionalgleichung 6.(11) als hilfreich.

Es ergibt sich wegen 6.(5) und der spezifischen Lückenstruktur von 6.(11) die folgende Integraldarstellung vom Riemannschen Typ :

Satz 11

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 2$ und $\operatorname{Re} s > 0$. Dann gilt :

$$\omega(s, \alpha) = 1 + \frac{2}{\alpha^s \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \left\{ \cosh \frac{x}{\alpha} - 1 \right\} dx \quad (5)$$

Beweis:

Sei $\operatorname{Re} s > 0$. Dann folgt aus 6.(5) und 6.(11)

$$\begin{aligned} \omega(s, \alpha) &= 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{1}{\alpha^{s+\mu}} \frac{1}{\Gamma(s+\mu)} \int_0^\infty \frac{x^{s+\mu-1}}{e^x - 1} dx \\ &= 1 + \frac{2}{\alpha^s \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \sum_{\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\mu \frac{1}{\mu!} dx \\ &= 1 + \frac{2}{\alpha^s \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \left\{ \cosh \frac{x}{\alpha} - 1 \right\} dx \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Summation und Integration ist erlaubt wegen der für $x > 0, \alpha \geq 2$ gültigen Abschätzung

$$\frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} - 2}{e^x - 1} < \frac{e^{\frac{x}{2}} - 1 + e^{-\frac{x}{2}} - 1}{(e^{\frac{x}{2}} - 1)(e^{\frac{x}{2}} + 1)} < e^{-\frac{x}{2}},$$

und das letzte Integral konvergiert in $\operatorname{Re} s > 0$ und stellt dort eine reguläre Funktion von s dar.

Aus Satz 11 ergeben sich nun speziell für die "Ramaswami-Funktionen" $\zeta(s, \alpha)$ ($\alpha = 2, 3, 4, 6$) die bemerkenswerten in $\operatorname{Re} s > 0$ gültigen Integraldarstellungen vom Riemannschen Typ :

$$2 \zeta(s) (1 - 2^{1-s}) = 1 + \frac{2}{2^s \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \left\{ \cosh \frac{x}{2} - 1 \right\} dx \quad (6)$$

$$\zeta(s) (1 - 3^{1-s}) = 1 + \frac{2}{3^s \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \left\{ \cosh \frac{x}{3} - 1 \right\} dx \quad (7)$$

$$\zeta(s) (1 - 2^{-s} - 2 \cdot 4^{-s}) = 1 + \frac{2}{4^s \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \left\{ \cosh \frac{x}{4} - 1 \right\} dx \quad (8)$$

$$\zeta(s) (1 - 2^{-s} - 3^{-s} - 6^{-s}) = 1 + \frac{2}{6^s \Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \left\{ \cosh \frac{x}{6} - 1 \right\} dx \quad (9)$$

(6) läßt sich auch in folgender Form schreiben :

$$2 \zeta(s) (1 - 2^{1-s}) = 1 + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \tanh \frac{x}{2} dx.$$

Hieraus folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Transzendenz des Parameterintegrals

$$\int_0^1 (\log y)^{2n-1} \frac{y-1}{y+1} dy$$

mit dem Wert

$$(-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{2n} (2\pi)^{2n} (1 - 2^{1-2n}) - (2n-1)!.$$

Eine ähnlich einfache Darstellung für das Integral

$$\int_0^1 (\log y)^{2n} \frac{y-1}{y+1} dy$$

existiert nicht (s. auch Abschnitt 2.2.(34)).

Die Anwendung der Summenformel von Plana - Abel - Cauchy auf die Funktion

$$w(z) = (z+a)^{-s}$$

mit

$$a \in \mathbb{R}^+, \operatorname{Re} s > 1, |\arg(z+a)| < \frac{\pi}{2}$$

führt zur Hermiteschen Darstellung der Hurwitzschen Zetafunktion in der Form (s. z.B. [42], S.270):

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{2} a^{-s} + \frac{a^{1-s}}{s-1} + 2 \int_0^{\infty} (a^2 + y^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}) \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1}. \quad (10)$$

Dabei konvergiert das Integral in (10) für alle $s \in \mathbb{C}$ und stellt eine in $\mathbb{C}$ analytische Funktion von s dar.

Wegen

$$\zeta(s, \frac{1}{2}) = \zeta(s)(2^s - 1)$$

ergibt sich aus (10)

$$\zeta(s)(2^s - 1) = \frac{s 2^{s-1}}{s-1} + 2 \int_0^{\infty} (\frac{1}{4} + y^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} 2y) \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1}. \quad (11)$$

Diese Formel stammt von J.L.W.V. Jensen ([42], S.279).

Satz 11 lieferte eine nur in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ gültige Integraldarstellung von $\zeta(s, \alpha)$ ($\alpha \geq 2$) durch ein Parameterintegral über die nichtnegative reelle Halbgerade. Es soll nun eine Integraldarstellung für $\zeta(s, \alpha)$ ($\alpha > 1$) hergeleitet werden, die für die ganze s -Ebene mit Ausnahme des Punktes $s=1$ gilt. Wir stützen uns hier auf 6.(11) und (10). Es gilt die folgende Hermitesche Integraldarstellung:

Satz 12

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ und $s \in \mathbb{C} - \{1\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} w(s, \alpha) = & \frac{1}{s-1} \left\{ s [1 + \eta_1(s, \alpha)] + [1 + \alpha^{-s} - \eta_2(s, \alpha)] \right\} + \\ & + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} (1 + y^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} y) \phi(s, \alpha, y) dy \end{aligned} \quad (12)$$

mit

$$\eta_1(s, \alpha) = \frac{1}{2} \{ (\alpha-1)^{-s} + (\alpha+1)^{-s} \} \quad (13)$$

$$\eta_2(s, \alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha-2}{\alpha} (\alpha-1)^{-s} + \frac{\alpha+2}{\alpha} (\alpha+1)^{-s} \right\}$$

und

$$\Phi(s, \alpha, y) = (\alpha-1)^{1-s} W\left(\frac{\alpha-1}{\alpha} y\right) - \alpha^{1-s} W(y) + (\alpha+1)^{1-s} W\left(\frac{\alpha+1}{\alpha} y\right) \quad (14)$$

mit

$$W(u) = \coth \pi u - 1 \quad (u > 0).$$

Beweis:

Aus (10) folgt zunächst für $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + 2 \int_0^{\infty} (1+y^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} y) \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1}$$

und

$$\zeta(s, \frac{\alpha-1}{\alpha}) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^s}{(\alpha-1)^s} + \frac{(\alpha-1)^{1-s}}{\alpha^{1-s}(s-1)} + 2 \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1-s} \int_0^{\infty} (1+y^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} y) \frac{dy}{e^{2\pi \frac{\alpha-1}{\alpha} y} - 1}$$

sowie

$$\zeta(s, \frac{\alpha+1}{\alpha}) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^s}{(\alpha+1)^s} + \frac{(\alpha+1)^{1-s}}{\alpha^{1-s}(s-1)} + 2 \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{1-s} \int_0^{\infty} (1+y^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} y) \frac{dy}{e^{2\pi \frac{\alpha+1}{\alpha} y} - 1}$$

Aus 6.(11) ergibt sich nun (12) für $\operatorname{Re} s > 1$.

Zu zeigen ist noch, daß das Integral in (12) für jedes $s \in \mathbb{C}$ konvergiert und eine analytische Funktion von s für alle Werte von s darstellt. Es genügt offensichtlich beide Behauptungen für das Integral

$$\int_0^{\infty} (1+y^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \operatorname{arctg} y) \frac{dy}{e^{2\pi \alpha y} - 1} \quad (15)$$

zu bestätigen. Hierbei ist α ein beliebiger positiver reeller Parameter.

Wegen der für $y \geq 0$ geltenden Ungleichungen

$$\operatorname{arctg} y \begin{cases} < y & \text{für } y < \frac{\pi}{2} \\ < \frac{\pi}{2} & \text{für } y > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

konvergiert (15) für jedes $s \in \mathbb{C}$.

Die Analytizität von (15) in $\mathbb{C}$ resultiert aus der Tatsache, daß das Integral

$$\int_0^{\infty} \left\{ \operatorname{arctg} y \cos(s \operatorname{arctg} y) - \frac{1}{2} \log(1+y^2) \sin(s \operatorname{arctg} y) \right\} \frac{(1+y^2)^{-\frac{s}{2}}}{e^{2\pi i y} - 1} dy,$$

das sich aus (15) ergibt, wenn man unter dem Integralzeichen nach s differenziert, in jeder Kreisscheibe $|s| \leq r$ ($r > 0$) gleichmäßig konvergiert.

Dies folgt aus den Ungleichungen ($|s| \leq r$, $r > 0$)

$$|(1+y^2)^{-\frac{s}{2}} \operatorname{arctg} y \cos(s \operatorname{arctg} y)| < (1+y^2)^{\frac{r}{2}} y \cosh\left(\frac{\pi r}{2}\right)$$

$$|\sin(s \operatorname{arctg} y)| < \sinh ry \quad (y < \frac{\pi}{2})$$

$$|\sin(s \operatorname{arctg} y)| < \sinh r \frac{\pi}{2} \quad (y > \frac{\pi}{2})$$

und der Konvergenz des Integrals

$$r \int_0^{\infty} (1+y^2)^{\frac{r}{2}} \frac{y dy}{e^{2\pi i y} - 1}.$$

Abschließend sollen nun noch mit Hilfe der Mellin-Integraltransformation und der Interraldarstellung aus Satz 11 Mellinsche "Umkehrformeln" für die Funktion

$$F(s) = \frac{1}{2} \alpha^s \Gamma(s) \{ \omega(s, \alpha) - 1 \} \quad (\alpha \geq 2) \quad (16)$$

gegeben werden.

Ist $f(x)$ eine in $x > 0$ stetig differenzierbare Funktion, konvergiert das Integral

$$\int_0^{\infty} x^{\sigma-1} |f(x)| dx$$

für $\sigma \in (\alpha_1, \alpha_2)$, wobei $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 < \alpha_2$ und nat man ferner für die komplexe Funktion $F(s)$ die Darstellung

$$F(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx \quad (17)$$

mit $\text{Re } s = \sigma \in (\alpha_1, \alpha_2)$, dann gilt nach der 2. Mellinschen Umkehrformel (s. [6], S.88) für jedes solche σ und $x > 0$ die "reziproke" Formel

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) x^{-s} ds. \quad (18)$$

Sofern die Voraussetzungen bezüglich $f(x)$ und $F(s)$ erfüllt sind, schreiben wir für die Beziehung (17) kurz: $F(s) = M\{f(x)\}$. Man setze nun im Integral von (5) für $x > 0$ und festes $\alpha \geq 2$

$$f(x) = \frac{\cosh \frac{x}{\alpha} - 1}{e^x - 1}$$

und ferner

$$F(s) = \frac{\alpha^s \Gamma(s)}{2} \{ \omega(s, \alpha) - 1 \}.$$

Wie man leicht sieht, ist $f(x)$ in $x > 0$ stückweise glatt. Darüberhinaus konvergiert das Integral

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{\cosh \frac{x}{\alpha} - 1}{e^x - 1} dx$$

nach Satz 11 für $\sigma = \text{Re } s > 0$. Damit erhält man aus (5) die Beziehung $F(s) = M\{f(x)\}$ und für jedes feste $\sigma > 0$ und $x > 0$ gilt die die "Umkehrformel":

$$\frac{\cosh \frac{x}{\alpha} - 1}{e^x - 1} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \alpha^s \Gamma(s) \{ \omega(s, \alpha) - 1 \} x^{-s} ds. \quad (19)$$

speziell hat man nach (6) für festes $\sigma > 0$ und $x > 0$:

$$e^{-x} \tanh \frac{x}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) \{ 2 \zeta(s) (1-2^{1-s}) - 1 \} x^{-s} ds. \quad (20)$$

Bezüglich der Mellin-Transformation des Produkts zweier geeigneter reeller Funktionen $f(x)$ und $h(x)$, für die die Relationen

$F(s) = M\{f(x)\}$ im Streifen $S_1: \alpha_1 < \operatorname{Re} s = \sigma < \alpha_2$

und

$H(s) = M\{h(x)\}$ im Streifen $S_2: \beta_1 < \operatorname{Re} s = \sigma < \beta_2$

gültig sind, bekommt man für jedes konstante $c \in S_1 \cap S_2$ die Relation

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) H(u-s) ds = \int_0^\infty h(x) f(x) x^{u-1} dx, \quad (21)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} M\{f(x) h(x)\} &= \int_0^\infty f(x) h(x) x^{u-1} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty h(x) x^{u-1} \left\{ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) x^{-s} ds \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) ds \int_0^\infty h(x) x^{u-s-1} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) H(u-s) ds. \end{aligned}$$

Betrachtet man beispielsweise für $\sigma > 1$

$$F(s) = H(s) = \Gamma(s) \zeta(s),$$

dann gilt bekanntlich

$$f(x) = h(x) = ce^{x-1} x^{-1}$$

und aus (21) folgt für $1 < c < \operatorname{Re} u - 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \Gamma(u-s) \zeta(s) \zeta(u-s) ds = \Gamma(u) \{ \zeta(u-1) - \zeta(u) \}. \quad (22)$$

Diese Formel findet sich bei Titchmarsh ([39], S.34).

Hardy ([39], S.35) nimmt für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$

$$F(s) = H(s) = \Gamma(s) \zeta(2s),$$

dann gilt bekanntlich

$$f(x) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$$

Die rechte Seite von (21) wird dann zu

$$\Gamma(u) [\zeta(u) \{1^{-u} - 3^{-u} + 5^{-u} - \dots\} - \zeta(2u)],$$

und Hardys Formel lautet für $\frac{1}{2} < c < \operatorname{Re} u - \frac{1}{2}$ (s. [39], S. 35)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \Gamma(u-s) \zeta(2s) \zeta(2u-2s) ds = \quad (23)$$

$$= \Gamma(u) [\zeta(u) \{1^{-u} - 3^{-u} + 5^{-u} - \dots\} - \zeta(2u)]$$

Wir wollen hier eine neue, den Relationen (22) und (23) ähnliche herleiten.

Satz 13

Für $1 < c < \operatorname{Re} u - 1$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{s-1} \Gamma(s) \{ \omega(s, 2) - 1 \} \Gamma(u-s) \zeta(u-s) ds \\ = 2^{u-1} \Gamma(u) \left\{ \frac{1}{2} \omega(u-1, 2) - \omega(u, 2) + 1 \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Beweis:

Man betrachtet die Paare

$$F(s) = 2^{s-1} \Gamma(s) \{ \omega(s, 2) - 1 \} \quad (\sigma > 0)$$

$$f(x) = \frac{\cosh \frac{x}{2} - 1}{e^x - 1}$$

und

$$H(s) = \Gamma(s) \zeta(s) \quad (\sigma > 1), \quad h(x) = (e^x - 1)^{-1}.$$

Für diese Konstellation erhält man für die rechte Seite von (21)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{u-1} \frac{\cosh \frac{x}{2} - 1}{(e^x - 1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{u-1} \{ e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} - 2 \} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-cnx} dx = \\ &= 2^{u-1} \Gamma(u) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+2)^u} = 2^{u-1} \Gamma(u) \left\{ \frac{1}{2} \omega(u-1, 2) - \omega(u, 2) + 1 \right\}. \end{aligned}$$

8. Eindeutigkeitssätze

8.1. Die Hadamard-Dinghassche Charakterisierungstheorie der Riemannschen Zetafunktion

1909 wies J. Hadamard in einer kaum beachteten Note ([11]) darauf hin, daß die Riemannsche Zetafunktion durch jede der Jensenschen Funktionalgleichungen 6.(10) eindeutig charakterisiert wird, wenn man die Grenbedingung $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \zeta(s+\mu) = 1$ berücksichtigt.

Präzise formuliert gilt der

Satz 14 (Hadamardscher Charakterisierungssatz)

Jede in $\operatorname{Re} s > 1$ analytische Funktion $w(s)$, die einer der Funktionalgleichungen

$$1 - w(s)(1-2^{1-s}) = \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{w(s+\mu)}{2^{s+\mu}} \quad (1)$$

bzw.

$$w(s)(1-2^{1-s}) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{w(s+\mu)}{2^{s+\mu}} \quad (2)$$

mit der Grenzbedingung

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} w(s+\mu) = 1 \quad (3)$$

genügt, ist gleich der Riemannschen Zetafunktion.

Einen analogen Satz vermutete Hadamard bezüglich der Funktionalgleichungen 6.(3) und 6.(4).

1974 lieferte A. Dinghas ([7]) einen exakten Beweis der Hadamardschen Behauptungen und einiger darüberhinausgehender Resultate.

Hier soll eine kurze Übersicht der Dinghasschen Beiträge gegeben werden.

Wir müssen zunächst eine Definition zitieren ([7], S. 995-6):

Definition

Sei

$$(i) \quad I_{\alpha} = \{x \mid 0 < \alpha < x < +\infty\} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}^+$$

- (ii) $h(x, \mu)$ eine auf $I_\alpha \times N_0$ definierte positive Funktion
- (iii) $a(x)$ eine auf I_α definierte reellwertige Funktion
- (iv) $a_\mu(x)$ ($\mu=0, 1, 2, \dots$) eine Folge von reellwertigen, stetigen Funktionen auf I_α mit der Eigenschaft, daß die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu(x) h(x, \mu)$$

in jedem Punkt $x \in I_\alpha$ absolut konvergiert.

Jede Funktionalgleichung von der Form

$$a(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu(x) w(x+\mu) \quad (x \in I_\alpha)$$

mit der Grenzbedingung

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{w(x+\mu)}{h(x, \mu)} = 1$$

wird eine Hadamardsche Funktionalgleichung genannt.

Ein Kerngedanke der Dinghasschen Methode liegt in der Anwendung einiger allgemeiner neuer Sätze ([7], Hilfssätze 1-5) aus der Theorie der linearen reellen unendlichen Gleichungssysteme auf die vorliegende Problematik. Dabei spielt die Überlegung eine Rolle, daß man sich, da ja eine Lösung bekannt ist, auf die Frage "Gibt es höchstens eine Lösung?" beschränken kann. Diese Prioritätenverschiebung der Existenzfrage zugunsten der Eindeutigkeitsfrage "vereinfacht den methodischen Gang der Hadamardschen Überlegungen wesentlich" ([7], S. 996-7).

Dinghas Hauptsatz (Hilfssatz 2 aus [7]) lautet:

Satz 15

Sei $[a_{ik}]_1^\infty$, eine reelle Matrix mit den Eigenschaften

$$(i) \quad a_{ik} > 0 \quad (i \leq k), \quad a_{k \ k-1} = -1 \quad (k=2, 3, \dots)$$

$$(ii) \quad a_{ik} = 0 \quad (i > k+1)$$

$$(iii) \quad \sum_k a_{jk} < +\infty \quad (j=1, 2, \dots).$$

Es gibt dann höchstens eine reelle Folge $(x_\mu)_0^\infty$ mit

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu = 1 \quad (4)$$

und

$$\begin{aligned} x_0 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots \\ 0 &= -x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots \\ 0 &= \quad -x_3 + a_{33} x_3 + \dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (5)$$

Die Koeffizientenbedingungen in Satz 15 ermöglichen den Nachweis, daß -unter Annahme der Existenz einer Lösung- alle x_μ positiv sein müssen, während sich die Eindeutigkeit der Lösung aus der Grenzbedingung (4) ergibt. Denn diese "erzeugt" eine Darstellung für jedes einzelne x_μ in einer nur von den Koeffizienten des Systems (5) abhängigen Form, d.h. jedes x_μ erscheint als Grenzwert einer Folge von unendlichen Reihen, deren jeweilige Summanden endliche (positive) Unterdeterminanten der Koeffizientendeterminante des Systems sind, womit die Lösung durch einen "der üblichen Grenzprozesse der Analysis" dargestellt ist ([7], S.996).

In eleganter Weise läßt sich nun die Hadamardsche Behauptung bezüglich der Funktionalgleichung (2) mit (3) bestätigen. Faßt man nämlich (2) für festes reelles $x \in I_1$ als Hadamardsche Funktionalgleichung auf, setzt

$$w(x+\mu) = x_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

und

$$a_\mu(x) = \frac{1}{2^{x-1} - 1} \frac{\Gamma(x+\mu)}{\Gamma(x) \mu!} \frac{1}{2^{\mu+1}} \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

und beachtet, daß die mittels dieser Koeffizienten gebildete Funktionalgleichung

$$w(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu(x) w(x+\mu)$$

das lineare Gleichungssystem (5) mit

$$a_{k\mu} = \frac{1}{2^{x+k-2} - 1} \frac{\Gamma(x+\mu)}{\Gamma(x+k-1)(\mu-k+1)! 2^{\mu-k+2}}$$

erzeugt, dann folgt aus Satz 15, dem Prinzip der analytischen Fortsetzung und 6.(10), daß (2) unter Berücksichtigung von (3) eine und nur eine Lösung, nämlich die Lösung $w(s) = \zeta(s)$ besitzt.

Man kann nun einerseits die Koeffizientenbedingung (i) in Satz 15 derart variieren (Hilfssätze 1 und 4 aus [7]), daß unter Anwendung des Prinzips der analytischen Fortsetzung auch die zweite Behauptung des Hadamardschen Charakterisierungssatzes bezüglich der Funktionalgleichung (1) mit (3) gilt. Das Problem besteht hier darin, daß wir es ($s=x \in I_1$!) mit einer alternierenden Reihe zu tun haben, so daß abzählbar unendlich viele Koeffizienten negativ sind.

Andererseits können die zitierten Hilfssätze in einer Form verallgemeinert werden (Hilfssätze 3 und 5 aus [7]), die es gestattet, aus einem dem Satz 14 ähnlichen ([7], Satz 2) für die Hurwitzsche Zetafunktion $\zeta(s, a)$ durch die Spezifikation $a=1$ die oben zitierte Hadamardsche Vermutung, daß die Riemannsche Zetafunktion durch jede der Funktionalgleichungen

$$1 = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \{w(s+\mu) - 1\}$$

bzw.

$$2^{-s} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \{w(s+\mu) - 1\}$$

mit

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} w(s+\mu) = 1$$

eindeutig bestimmt wird, abzuleiten.

Darüber hinaus läßt sich leicht mit Hilfe der Dinghasschen Methode zeigen, daß sowohl die Riemannsche Zetafunktion wie auch die Gammafunktion unendlich vielen Hadamardschen Funktionalgleichungen genügen. Die von Dinghas in diesem Zusammen-

hang aufgeworfene Frage nach der "einfachsten" Charakterisierung der betreffenden Funktionen durch eine solche Funktionalgleichung wird schwierig zu beantworten sein, solange man keine exakte Vorstellung des Begriffs der "einfachsten Charakterisierung" hat (s. [7], S.1007).

8.1. Die eindeutige Charakterisierung der Riemannschen Zetafunktion durch Hadamardsche Lückenfunktionalgleichungen.

Die Entwicklungen in 8.1. lassen vermuten, daß die Riemannsche Zetafunktion durch jede der Lückenfunktionalgleichungen 6.(12), 6.(13), 6.(14) und 6.(15) mit der Grenzbedingung

$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \zeta(s+\mu) = 1$ eindeutig bestimmt wird.

Es soll hier gezeigt werden

Satz 16

Jede in $\operatorname{Re} s > 1$ analytische Funktion $w(s)$, die einer der Funktionalgleichungen

$$2 \zeta(s)(1-2^{1-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{w(s+\mu)}{2^{s+\mu}} \quad (6)$$

bzw.

$$w(s)(1-3^{1-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{w(s+\mu)}{3^{s+\mu}} \quad (7)$$

bzw.

$$w(s)(1-2^{-s}-2 \cdot 4^{-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{w(s+\mu)}{4^{s+\mu}} \quad (8)$$

bzw.

$$w(s)(1-2^{-s}-3^{-s}-6^{-s}) = 1 + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{N}} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{w(s+\mu)}{6^{s+\mu}} \quad (9)$$

mit der Grenzbedingung

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} w(s+\mu) = 1 \quad (10)$$

genügt, ist gleich der Riemannschen Zetafunktion.

Die Funktionalgleichungen (6) - (9) sind für reelles $s=x \in \mathbb{I}_1$

"Hadamardsche Lückenfunktionalgleichungen" im Sinne der Definition aus 8.1..

Der Beweis von Satz 16, der die Hadamard-Dinghassche Charakterisierungstheorie der Riemannschen Zetafunktion erweitert, stützt sich auf die Dinghassche Methode (man vergleiche vor allem den Beweis des Hilfssatzes 2 aus [7]).

Grundlegend für unser Problem ist der folgende

Satz 17 (Lückensatz)

Sei $[a_{ik}]_1^\infty$ eine reelle Matrix mit

$$(i) \quad a_{2i-1 \ 2k-1} = 0 \quad i, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$(ii) \quad a_{2i \ 2k} = 0 \quad i, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$(iii) \quad a_{ik} = 0 \quad i > k+1$$

$$(iv) \quad a_{k \ k-1} = -1 \quad k = 2, 3, \dots$$

$$(v) \quad a_{ik} > 0 \quad \text{sonst}$$

Dann gibt es höchstens eine reelle Folge $(x_\mu)_0^\infty$ mit der Grenzbedingung

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu = 1 \quad (11)$$

und

$$x_0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots$$

$$0 = -x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots \quad (12)$$

$$0 = \quad \quad -x_2 + a_{33}x_3 + \dots$$

...

Beweis:

Man nehme an, es gäbe eine Lösung $(x_\mu)_0^\infty$ von (12) mit (11).

Sei n eine fest vorgegebene natürliche Zahl.

Die Determinanten

$$E_1 = 1$$

und

$$\varepsilon_k = \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & -1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{1k-1} & a_{2k-1} & \dots & a_{k-1,k-1} \end{vmatrix} \quad (2 \leq k \leq n)$$

sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0 \\ \varepsilon_1 a_{11} - \varepsilon_2 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 a_{1,n-1} + \varepsilon_2 a_{2,n-1} + \dots + \varepsilon_{n-1} a_{n-1,n-1} - \varepsilon_n = 0$$

Wie man leicht unter Anwendung der Koeffizientenbedingungen (i)-(v) nachweist, gilt

$$\varepsilon_k \begin{cases} = 0 & k \in \mathbb{Z}N, 1 \leq k \leq n \\ > 0 & k \in \mathbb{Z}N-1, 1 \leq k \leq n \end{cases} \quad (13)$$

Nach Dinghas ([7], S.1001 o.) betrachte man nun für $\mu = n, n+1, \dots$ die Linearkombination

$$\begin{aligned} E_\mu^n &= \varepsilon_1 a_{1\mu} + \dots + \varepsilon_n a_{n\mu} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & -1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \dots & a_{n-1,n-1} & -1 \\ a_{1\mu} & a_{2\mu} & \dots & a_{n-1\mu} & a_{n\mu} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Multipliziert man die ersten n Gleichungen des Systems (12) mit ε_1 bzw. $\varepsilon_2 \dots$ bzw. ε_n , dann erhält man nach Addition dieser neuen n Gleichungen offenbar ([7], Formel (3.6)):

$$x_0 = \sum_{\mu=n}^{\infty} E_\mu^n x_\mu. \quad (14)$$

Für die E_μ^n gilt wegen (13) und den Koeffizientenbedingungen (i) und (v):

$$E_\mu^n \begin{cases} = 0 & \mu \in \mathbb{Z}N-1, n \in \mathbb{N} \\ > 0 & \mu \in \mathbb{Z}N, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (15)$$

Damit hat man nach (14)

$$x_0 = \sum_{\mu=n}^{\infty} E_{\mu}^{\eta} x_{\mu} = \sum_{\substack{\mu \geq n \\ \mu \in 2\mathbb{N}}} E_{\mu}^{\eta} x_{\mu} = \sum^{*} E_{\mu}^{\eta} x_{\mu} > 0 \quad (16)$$

Hieraus ergibt sich mit (11) für $\varepsilon > 0$ und $n \geq n_0(\varepsilon)$ die Abschätzung

$$(1-\varepsilon) \sum^{*} E_{\mu}^{\eta} < x_0 < (1+\varepsilon) \sum^{*} E_{\mu}^{\eta}, \quad (17)$$

woraus einerseits die Beschränktheit der Summen $\sum^{*} E_{\mu}^{\eta}$ und andererseits die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum^{*} E_{\mu}^{\eta} = x_0 \quad (18)$$

folgt.

Daß jedes $x_{\mu} > 0$ ist und einer Darstellung vom Typ (18) genügt, ergibt sich durch die Konstruktion der analogen Ausdrücke E_{μ}^{η} für die reduzierten Systeme

$$0 = -x_{k-1} + \sum_{\mu=k}^{\infty} a_{k\mu} x_{\mu} \quad (k=m, m+1, \dots; m=2, 3, 4, \dots) \quad (19)$$

Hierbei hat man zu beachten, daß sich die Verhältnisse in (13) bzw. (15) genau umkehren, wenn die x_{μ} mit ungeradem Index μ betrachtet werden.

Die Eindeutigkeit der Lösung folgt nun leicht aus (16) und (18). Wenn man annimmt, daß zwei Lösungen $(x_{\mu})_0^{\infty}$ und $(y_{\mu})_0^{\infty}$ des Systems (12) mit

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} x_{\mu} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} y_{\mu} = 1 \quad (20)$$

existieren, dann gilt neben (16) auch

$$y_0 = \sum^{*} E_{\mu}^{\eta} y_{\mu} > 0$$

Within hat man wegen (18) und (20)

$$x_0 = y_0.$$

Daß $x_{\mu} = y_{\mu}$ für $\mu = 1, 2, 3, \dots$ ist, fließt aus analogen Betrachtungen an den Systemen (19).

Daß die Riemannsche Zetafunktion durch jede der Lückenfunktionalgleichungen (6) - (9) mit der Grenzbedingung (10) eindeutig bestimmt wird, geht -unter Benutzung des Prinzips der analytischen Fortsetzung- aus dem Lückensatz hervor. Der Beweis soll hier nur für (6) mit (10) vorgeführt werden. In allen anderen in Betracht kommenden Fällen verläuft er analog.

Man schreibe (6) in der Form ($s = x \in I_1$!)

$$W(x) = a(x) + \sum_{\mu \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}} a_{\mu}(x) W(x+\mu)$$

mit

$$a(x) = \frac{1}{2} \frac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1}$$

und

$$a_{\mu}(x) = \frac{1}{2} \frac{\{1+(-1)^{\mu}\}}{2^{x-1} - 1} \frac{\Gamma(x+\mu)}{\Gamma(x) \mu!} \frac{1}{2^{\mu+1}} \quad (\mu \in \mathbb{N}).$$

Diese spezielle Hadamardsche Lückenfunktionalgleichung erzeugt, wenn man noch

$$W(x+\mu) = x_{\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

setzt, das Gleichungssystem (12) mit

$$a_{k\mu} = \frac{1}{2} \frac{\{1+(-1)^{\mu-k+1}\}}{2^{x+k-2} - 1} \frac{\Gamma(x+\mu)}{\Gamma(x+k-1) (\mu-k+1)!} \frac{1}{2^{\mu-k+2}}$$

Damit kann die Funktionalgleichung (6) mit der Grenzbedingung (10) nach dem Lückensatz höchstens eine Lösung, also nur die Lösung $w(s) = \zeta(s)$ besitzen.

9. Funktionalgleichungen für die Lipschitz-Lerchsche Zetafunktion

Die durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n x} (n+a)^{-s} \quad (1)$$

mit

$$x \in \mathbb{R}, 0 < a \leq 1, \operatorname{Re} s = \sigma > \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte verallgemeinerte Zetafunktion $L(x, a, s)$ ist zuerst von R. Lipschitz ([24], [25]) und M. Lerch ([23]) eingehend untersucht worden.

Für die Funktion $L(x, a, s)$ gilt das folgende von Lerch ([23]) stammende

Theorem

Sei $0 < x < 1$. Dann gelten:

- (i) $L(x, a, s)$ läßt sich analytisch in die ganze s -Ebene fortsetzen und ist eine ganze Funktion von s .
- (ii) In $\mathbb{C}$ gilt die Funktionalgleichung

$$L(x, a, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \{ A_1 L(-a, x, s) + A_2 L(a, 1-x, s) \} \quad (2)$$

mit

$$A_1 = e^{\pi i \{ \frac{s}{2} - 2ax \}} \quad , \quad A_2 = e^{-\pi i \{ \frac{s}{2} - 2a(1-x) \}} .$$

Lerchs Beweis von (2) stützt sich auf Riemanns erste Beweismethode der Funktionalgleichung für $\zeta(s)$ (s. z.B. [39], S. 18 ff). T.M. Apostol ([1]) hat gezeigt, daß (2) auch mit Hilfe der zweiten Riemannschen Methode, die sich auf die Transformationstheorie der Poisson-Jacobischen Thetafunktion stützt, bewiesen werden kann.

Zwei interessante neue Beweise von (2) (einmal mit Hilfe des Residuensatzes, zum anderen durch Anwendung der Euler-MacLaurinschen Summenformel) hat B.O. Berndt ([3]) 1972 gegeben.

(2) steht in einem engen Zusammenhang mit der sogenannten Lipschitz-Formel ([25], S. 136, (19.)):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n a} (\gamma + i n)^{-s} = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^{\infty} (k+a)^{s-1} e^{-2\pi \gamma (k+a)} \quad (3)$$

mit $0 < a \leq 1$, $\operatorname{Re} s > 1$, $\operatorname{Re} \gamma > 0$.

Dieses Transformationsprinzip, das unter geeigneten Bedingungen aus (2) folgt (s. [25], S. 130), hatte Lipschitz schon 1856 für reelles s gefunden ([25]), den Beweis für komplexes s aber erst 1889 nach Erscheinen der Lerchschen Arbeit veröffentlicht. Auch Lipschitz folgt beim Beweis von (3) dem von Riemann in seiner berühmten Abhandlung von 1859 ([29]) eingeschlagenen Weg, d.h., Beweis der Funktionalgleichung für $\zeta(s)$ mit Hilfe von Konturintegration.

Hier soll zunächst ein anderer Beweis der Formel (3) gegeben werden. Dies geschieht mit Hilfe der Poissonschen Summenformel und einer speziellen Laplace-Transformierten.

Man wende die Poissonsche Summenformel ([40], S. 60)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n a} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} W(m+a) \quad (0 < a \leq 1) \quad (4)$$

mit

$$W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixt} dx$$

auf die Funktion

$$f(x) = (2\pi \gamma + ix)^{-s}$$

an, wobei $\operatorname{Re} s > 1$, $\operatorname{Re} \gamma > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $|\arg(2\pi \gamma + ix)| < \frac{\pi}{2}$ angenommen wird.

Dann bekommt man für $w(t)$ den Ausdruck

$$W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi \gamma + ix)^{-s} e^{ixt} dx.$$

Substituiert man hier

$$u = 2\pi \gamma + ix,$$

so folgt

$$W(t) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\Gamma(s)} t^{s-1} e^{-2\pi \gamma t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

unter Benutzung der Tatsache, daß das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2\pi\eta-i\infty}^{2\pi\eta+i\infty} u^{-s} e^{ut} du$$

die inverse Laplace-Transformierte von u^{-s} darstellt (s. [5], S.95). Damit folgt aus (4) die Behauptung (3).

Die eben bewiesene Tatsache, daß die Lipschitz-Formel aus der Poissonschen Summenformel folgt, führt im Zusammenhang mit der bemerkenswerten Entdeckung H.Hamburgers (s. [13] und die Erläuterungen auf S.3 der vorliegenden Arbeit), daß die Riemannsche Funktionalgleichung für $\zeta(s)$ (s. S.1), die Poisson-Jacobische Transformationsformel für die Thetafunktion $\mathcal{J}(\tau)$ (s. S.3) und die Poissonsche Summenformel untereinander äquivalent sind und unter Berücksichtigung des bekannten Resultats von H.Rademacher (s. H.Rademacher, Topics in Analytic Number Theory, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1973, S.86-88), daß die Lipschitz-Formel (3) die Riemannsche Funktionalgleichung für $\zeta(s)$ impliziert, auf den folgenden die Hamburgerschen Äquivalenzaussagen in ([13]) erweiternden neuen

Satz 18

Die Lipschitz-Formel (3), die Poissonsche Summenformel (4), die Riemannsche Funktionalgleichung für $\zeta(s)$ und die Poisson-Jacobische Transformationsformel für die Thetafunktion $\mathcal{J}(\tau)$ sind untereinander äquivalent, d.h., aus dem Bestehen einer dieser Relationen folgt das der übrigen.

Außer der berühmten Lerchschcn Funktionalgleichung (3) sind keine weiteren Transformationsformeln für die Lipschitz-Lerch-sche Zetafunktion $L(x,a,s)$ bekannt.

Indem wir die Ideen des Abschnitts 6. erneut aufgreifen, werden wir im folgenden aber zeigen, daß $L(x,a,s)$ Funktionalgleichungen vom Jensenschen Typ genügt, die die von Jensen für die Riemannsche Zetafunktion (s. Abschnitt 6.(3),(4)) und die von A.Dinacas ([7]) für die Hurwitzsche Zetafunktion gegebenen Identitäten verallgemeinern.

Gleichzeitig erhalten wir damit natürlich eine neue Fortsetzungsmethode für $L(x,a,s)$, also einen neuen Beweis der Behauptung (1) des Lerchschcn Theorems.

Es gilt der

Satz 19

$L(x, a, s)$ genügt für alle $s \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ den Funktionalgleichungen

$$\xi \cdot L(x, a, s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \{ L(x, a, s+\mu) - a^{-s-\mu} \} - a^{-s} \quad (5)$$

mit

$$\xi = e^{2\pi i x} - 1$$

und

$$\eta \cdot L(x, a, s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \{ L(x, a, s+\mu) - a^{-s-\mu} \} + \frac{\eta}{a^s} - (a+1)^{-s} \quad (6)$$

mit

$$\eta = 1 - e^{-2\pi i x}$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stellt $L(x, a, s)$ eine ganze Funktion von s dar.

Beweis:

Zunächst sieht man leicht, daß für jedes $\mu \in \mathbb{N}_0$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(n+a+k)^{s+\mu}} = e^{-2\pi i k x} \{ L(x, a, s+\mu) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{2\pi i n x}}{(n+a)^{s+\mu}} \} \quad (7)$$

für $\operatorname{Re} s > 1-\mu$ ($\mu=0,1,2,\dots$) richtig ist.

Aus dem Binomialtheorem folgt für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{2\pi i k x} \{ (n+a)^{-s} - (n+a+1)^{-s} \} &= \frac{e^{2\pi i k x}}{(n+a+1)^s} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+a+1} \right)^{-s} - 1 \right\} = \\ &= \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{-s}{\mu} \frac{e^{2\pi i k x}}{(n+a+1)^{s+\mu}} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s) \mu!} \frac{e^{2\pi i k x}}{(n+a+1)^{s+\mu}} \end{aligned}$$

und damit gilt für $\operatorname{Re} s > 1$

$$L(x, a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(n+a+1)^s} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(n+a+1)^{s+\mu}} \right\},$$

woraus nach (7) die Behauptung (5) folgt.

Analog ergibt sich für all $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{2\pi i n x} \{ (n+a+1)^{-s} - (n+a+2)^{-s} \} &= \frac{e^{2\pi i n x}}{(n+a+1)^s} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{n+a+2} \right)^{-s} \right\} = \\ &= \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \binom{s+\mu-1}{\mu} \frac{e^{2\pi i n x}}{(n+a+1)^{s+\mu}} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \frac{e^{2\pi i n x}}{(n+a+1)^{s+\mu}} \end{aligned}$$

und damit folgt durch Summation über $n = 0, 1, 2, \dots$ wegen (7) die Behauptung (6) für $\operatorname{Re} s > 1$.

Somit sind (5) und (6) zunächst unter der Voraussetzung $\operatorname{Re} s > 1$ bewiesen, wenn man noch beachtet, daß die Umordnungen stets erlaubt sind. Denn es ist in nämlicher Halbebene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+a+1)^{-\sigma-\mu} < (a+1)^{-\sigma-\mu} + \int_2^{\infty} \frac{dt}{(t+a)^{\sigma+\mu}} < \frac{\sigma+1}{\sigma} (a+1)^{-\mu}$$

und damit

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)\mu!} \right| \sum_{n=0}^{\infty} (n+a+1)^{-\sigma-\mu} < \frac{\sigma+1}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{a+1} \right)^{-|s|}.$$

Man setze nun

$$\omega(s+\mu) = L(x, a, s+\mu) - a^{-s-\mu},$$

dann ist $\omega(s+\mu)$ für $\operatorname{Re} s+\mu > 1$ ($\mu=1, 2, \dots$) durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(n+a)^{s+\mu}}$$

definiert und es gilt die Grenzbeziehung

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} (a+1)^{s+\mu} \omega(s+\mu) = e^{2\pi i x}. \quad (8)$$

Definiert man

$$c_\mu(s) = c_\mu = \binom{s+\mu-1}{\mu} \omega(s+\mu), \quad (9)$$

dann ist wegen (8):

$$\frac{1}{a+1} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{|c_\mu|}{|c_{\mu+1}|} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\left| \binom{s+\mu-1}{\mu} (a+1)^{s+\mu} \omega(s+\mu) \right|}{\left| \binom{s+\mu}{\mu+1} (a+1)^{s+\mu+1} \omega(s+\mu+1) \right|} = 1. \quad (10)$$

Beachtet man, daß (10) gleichmäßig für jedes s aus einem beschränkten Gebiet der s -Ebene gilt, so erkennt man die absolute und gleichmäßige Konvergenz der unendlichen Reihe in (5) für jedes solche Gebiet. Die Funktionalgleichung (5) liefert nun im Fall $x \in \mathbb{Z}$ (in welchem sich $L(x, a, s)$ auf die Hurwitzsche Zetafunktion reduziert) die analytische Fortsetzung der Funktion

$$s \zeta(s+1, a)$$

in die ganze s -Ebene, und (5) gilt überall.

Ist aber $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, d.h. $\xi \neq 0$, so folgt aus der Funktionalgleichung (5) die analytische Fortsetzung der Lipschitz-Lerchschen Zetafunktion $L(x, a, s)$ zu einer ganzen Funktion, und (5) gilt überall.

Bezüglich der Funktionalgleichung (6) nehme man anstatt (9) natürlich

$$c_\mu(s) = c_\mu = (-1)^{\mu-1} \binom{s+\mu-1}{\mu} \omega(s+\mu)$$

und fahre dann analog fort.

Damit ist der Satz bewiesen.

Geht man ähnlich dem zweiten Beweis von 6.(3) und 6.(4) von den in $\operatorname{Re} s > 1$ gültigen Integraldarstellungen ([23], S.20) vom Riemannschen Typ

$$L(x, a, s) - a^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \frac{e^{-at} e^{2\pi i x t}}{1 - e^{2\pi i x t}} dt$$

bzw.

$$e^{-2\pi i x} \left\{ L(x, a, s) - a^{-s} - \frac{e^{2\pi i x}}{(a+1)^s} \right\} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{e^{-at} e^{2\pi i x - 2t}}{1 - e^{2\pi i x - t}} dt$$

aus, so erhält man einerseits für $\operatorname{Re} s > 1$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \{ L(x, a, s+k) - a^{-s-k} \} = \\ &= \frac{e^{2\pi i x}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{e^{-at}}{1 - e^{2\pi i x - t}} dt - \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{e^{-at} e^{2\pi i x - t}}{1 - e^{2\pi i x - t}} dt = \\ &= \xi \cdot L(x, a, s) + a^{-s} \end{aligned} \quad (11)$$

und andererseits für $\operatorname{Re} s > 1$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \{ L(x, a, s+k) - a^{-s-k} \} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{e^{-at} e^{2\pi i x - t}}{1 - e^{2\pi i x - t}} dt - \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{e^{-at} e^{2\pi i x - t}}{1 - e^{2\pi i x - t}} e^{-t} dt \\ &= \eta \cdot L(x, a, s) - \eta \cdot a^{-s} + (a+1)^{-s}, \end{aligned} \quad (12)$$

also wieder die Funktionalgleichungen des Satzes 19, die für $x \in \mathbb{Z}$ in

$$a^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \{ \zeta(s+k, a) - a^{-s-k} \} \quad (13)$$

bzw.

$$(a+1)^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \{ \zeta(s+k, a) - a^{-s-k} \} \quad (14)$$

übergehen. (13) und (14) stammen von A. Dinghas ([7]) und gelten nach Satz 19 in der ganzen Ebene. Die Spezifikation $a=1$ führt wieder zu 6.(3) bzw. 6.(4).

Nun liefert (13) die analytische Fortsetzung der Funktion

$$s \zeta(s+1, a),$$

die für $\operatorname{Re} s > 0$ durch die Reihe

$$s \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s-1}$$

definiert ist, in die ganze Ebene. Hieraus erkennt man den meromorphen Charakter der für $\operatorname{Re} s > 1$ durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+a)^{-s} \quad (0 < a \leq 1)$$

definierten Funktion $w(s)$ (einziger einfacher Pol bei $s=1$).

Diese Tatsache löst das Fortsetzbarkeitsproblem der Dirichletschen Funktionen $L_k(s)$ ($k=2,3,\dots, \varphi(m)$; $\varphi(m)$ ist die Eulersche φ -Funktion und $m \in \mathbb{N}$), die für $\operatorname{Re} s > 0$ durch die Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_k(n) n^{-s}$$

definiert sind, wobei χ_k ein vom Hauptcharakter χ_1 verschiedener Charakter modulo m ist.

Denn man hat die Darstellung

$$\begin{aligned} L_k(s) &= \sum_{l=1}^{m-1} \chi_k(l) \sum_{n=0}^{\infty} (mn+l)^{-s} \\ &= m^{-s} \sum_{l=1}^{m-1} \chi_k(l) \sum_{n=0}^{\infty} (n+l m^{-1})^{-s}, \end{aligned}$$

und da die Funktion $w(s)$ meromorph ist mit einem einzigen einfachen Pol bei $s=1$, so hat auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+l m^{-1})^{-s}$$

für jedes geeignete l diese Eigenschaft, woraus folgt, daß $L_k(s)$ überall mit eventueller Ausnahme des Punktes $s=1$ regulär ist. Dieser Punkt ist aber wegen

$$\sum_{l=1}^{m-1} \chi_k(l) = 0$$

ein regulärer Punkt. Damit ist jedes $L_k(s)$ ($k=2,3,\dots, \varphi(m)$) eine ganze Funktion von s (s. auch [22], S.475-8).

Wir gehen hier nun kurz auf zwei Folgerungen aus Satz 19 ein, die mehr arithmetischen Charakter haben.

Eine explizite Darstellung der Werte der Lipschitz-Lerchschen Zetafunktion an den Stellen $s=-n$ ($n=0,1,2,\dots$) hat T.M.Apostol ([11]) gegeben, welche zeigt, daß $L(x,a,-n)$ eine rationale Funktion in a und ξ ist.

Andererseits ergibt sich aus unserer Funktionalgleichung (5) für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ die Rekursionsformel:

$$L(x, a, 0) = -\xi^{-1} \quad (15)$$

$$\xi \cdot L(x, a, -n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k} \{ L(x, a, -k) - a^k \} - a^n \quad (n \geq 1)$$

und diese liefert für $n=1,2,3,4$ die speziellen Werte:

$$L(x, a, -1) = \frac{\xi+1}{\xi^2} - \frac{a}{\xi}$$

$$L(x, a, -2) = -\frac{\xi^2+3\xi+2}{\xi^3} + 2 \frac{\xi+1}{\xi^2} a - \frac{a^2}{\xi}$$

$$L(x, a, -3) = \frac{\xi^3+7\xi^2+12\xi+6}{\xi^4} - 3 \frac{\xi^2+3\xi+2}{\xi^3} a + 3 \frac{\xi+1}{\xi^2} a^2 - \frac{a^3}{\xi}$$

$$L(x, a, -4) = -\frac{\xi^4+15\xi^3+50\xi^2+60\xi+24}{\xi^5} + 4 \frac{\xi^3+7\xi^2+12\xi+6}{\xi^4} a -$$

$$-6 \frac{\xi^2+3\xi+2}{\xi^3} a^2 + 4 \frac{\xi+1}{\xi^2} a^3 - \frac{a^4}{\xi}.$$

Schließlich kommen wir noch einmal auf die in Abschnitt 5. definierte ganze Funktion $L(s)$ zurück.

Aus der Funktionalgleichung (5) folgt für $a=x=\frac{1}{2}$ und $s=1$ sofort die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k+1} \{ L(k+1) - 1 \} = 2 - \pi, \quad (16)$$

wenn man beachtet, daß

$$L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, s\right) = 2^s L(s), \quad (17)$$

wobei $L(s)$ in $\operatorname{Re} s > 0$ durch 5.(1) definiert wird und $L(1) = \frac{\pi}{4}$ gilt.

Andererseits liefert die Addition von (5) und (6)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+2k-1)}{\Gamma(s)(2k-1)!} \{L(x, a, s+2k-1) - a^{-s-2k+1}\} = \\ = \frac{\gamma + \frac{1}{2}}{2} L(x, a, s) + \frac{1}{(a+1)^s} + \frac{1-\gamma}{a^s}. \end{aligned} \quad (18)$$

Setzt man in (18) $a=x=\frac{1}{2}$ und $s=1$, so erhält man unter Berücksichtigung von (17)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \{L(2k) - 1\} = -\frac{2}{3} \quad (19)$$

und damit sofort aus (16)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k+1} \{L(2k+1) - 1\} = \frac{8}{3} - \pi. \quad (20)$$

Der Wert von $L(2k+1)$ ($k \in \mathbb{N}_0$) ist bekannt und gleich

$$\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+1}} \frac{(-1)^k}{2(2k)!} E_{2k},$$

wobei E_{2k} die $2k$ -te Eulersche Zahl ist.

Also folgt mit (20)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{(-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{2(2k)!} E_{2k} - 2^{2k+1}\} = \frac{8}{3} - \pi. \quad (21)$$

Die arithmetische Natur von $L(2k)$ ($k \in \mathbb{N}$) ist wie die von $\zeta(2k+1)$ ($k \in \mathbb{N}$) völlig unbekannt.

Literaturverzeichnis

- [1] T.M. Apostol, On the Lerch Zeta Function, Proc.Amer.Soc., 2 (1951), 690-3.
- [2] T.M. Apostol, Remark on the Hurwitz Zeta Function, Pacific J. Math. 1 (1951), 161-7.
- [3] B.C. Berndt, Two new proofs of Lerchs functional equation, Proc.Amer.Soc., Vol. 32 Nb.2 (1972), 403-8.
- [4] B.C. Berndt, Modular transformations and generalizations of several formulae of Ramanujan, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 7.1 (1977), 147-189.
- [5] S. Colombo und J. Lavoine, Transformations de Laplace et de Mellin, Gauthier-Villars, 1972.
- [6] R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, Heidelberger Taschenbücher, Band 30, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1968.
- [7] A. Dinghas, Zur Charakterisierung der Riemannschen Zetafunktion durch Hadamardsche Funktionalgleichungen, Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquées, Tome XIX, N° 8 (1974), 995-1007.
- [8] E. Grosswald, Die Werte der Riemannschen Zetafunktion an ungeraden Argumentstellen, Nachr.Akad.Wiss. Gött., Math.Phys.Klasse II (1970), 9-13.
- [9] E. Grosswald, Comments on some formulae of Ramanujan, Acta Arithmetica XXI (1972), 25-34.
- [10] A.P. Guinand, Some rapidly convergent series for the Riemann ζ -function, Quart. J. Math. Oxford (2) 6, (1955), 156-160.
- [11] J. Hadamard, Sur une propriété fonctionnelle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Bull.Soc.Math. France 37 (1909), 59-60.
- [12] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ -Funktion. Math. Z. 10 (1921), 240-245; 11 (1921), 224-245; 13 (1922), 283-311.
- [13] H. Hamburger, Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ -Funktion äquivalent sind, Math.Ann 85 (1922), 129-140.

- [14] G.H. Hardy, A formula of Ramanujan, Journal London Math. Soc. 3 (1928), 238-240.
- [15] G.H. Hardy, Note on Ramanujans trigonometrical function $c_q(n)$ and certain series of arithmetical functions, Proc. Cambridge Phil.Soc. 20 (1920-1), 263-271.
- [16] G.H. Hardy und M. Riesz, The general theory of Dirichlet series, Cambridge University Press, 1915.
- [17] G.H. Hardy, Ramanujan, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y..
- [18] A. Hurwitz, Einige Eigenschaften der Dirichletschen Funktionen $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{D}{n}\right) n^{-s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 27 (1882), 86-101.
- [19] J.L.W.V. Jensen, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Compt. Rend.Acad.Sci. Paris, 104 (1887), 1156-7.
- [20] D. Klusch, On Certain Infinite Series, Archiv d. Math., XXIX (1977), 280-283.
- [21] N.S. Koshliakov, Application of the theory of sum formulae to the investigation of one valued analytical functions in the theory of numbers. Messenger of Mathematics 58 (1928), 1-23.
- [22] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, Leipzig und Berlin, Druck und Verlag B.G. Teubner 1909.
- [23] M. Lerch, Note sur la fonction $K(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(n+a)^s}$, Acta Math. 11 (1887), 19-24.
- [24] R. Lipschitz, Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe, J. Reine u. Angew. Math. 54 (1857), 313-328.
- [25] R. Lipschitz, Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen, J. Reine u. Angew. Math. 105 (1889), 127-156.
- [26] S. Ramanujan, Notebooks, Facsimile edition in 2 volumes by the Tata Institut of Fundamental Research, Bombay 1957.
- [27] S. Ramanujan, On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers, Trans.Camb.Phil. Soc. 22 (1918), 259-276.

- [28] V. Ramaswami, Notes on Riemanns ζ -function, J.Lond.Math. Soc. 9 (1934), 165-9.
- [29] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, Collected Works, Dover Books (1935).
- [30] J.R. Smart, On the values of the Epstein zeta function, Glasgow Math.J. 14 (1973), 1-12.
- [31] A. Schönhage, Approximationstheorie, Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1971.
- [32] W. Schwarz, Einführung in die Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, Band 278/278 a.
- [33] W. Schwarz, Ramanujan-Entwicklungen stark multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, Acta Arith. 22 (1973), 329-338.
- [34] W. Schwarz, Ramanujan-Entwicklungen stark multiplikativer Funktionen, J. Reine Angew. Math. 262/263 (1973), 66-73.
- [35] W. Schwarz, Über die Ramanujan-Entwicklung multiplikativer Funktionen, Acta Arith., 27 (1975), 269-279.
- [36] C.L. Siegel, Beweis einer Formel für die Riemannsche Zetafunktion, Math. Scandinavia 14 (1964), 193-6.
- [37] C.L. Siegel, Bemerkungen zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 86 (1922), 276-279.
- [38] A. Terras, Some formulas for the Riemann zeta function at odd interger argument resulting from Fourier expansions of the Epstein zeta function, Acta Arith. 29 (1976), 181-9.
- [39] E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta function, Oxford at the Clarendon Press, 1951.
- [40] E.C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford 1943.
- [41] E. C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford University Press, 1968.
- [42] E.T. Whittaker und G.N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge University Press, Fourth edition, reprinted 1973.

Lebenslauf

Ich, Dieter Klusch, wurde am 5. Oktober 1945 in Berlin-Charlottenburg geboren.

Dort besuchte ich von 1952 bis 1958 die Hebbel-Grundschule und dann das Schiller-Gymnasium im neusprachlichen Zug, das ich am 9. März 1965 mit dem Abitur und dem Erwerb des Großen Latinum verließ.

Im Wintersemester 1965/66 nahm ich das Studium der Politischen Wissenschaften an der Freien Universität Berlin auf und wechselte im Wintersemester 1966/67 zur Fachrichtung Mathematik und Physik.

Die Diplomhauptprüfung in Mathematik und Astronomie legte ich am 21. Mai 1973 mit der Note "Mit Auszeichnung" ab.

Die Diplomarbeit "Simultane Approximation algebraischer Zahlen" hat den Herren Proff. Drs. A.Dinghas (Berlin) und S.Selberg (Trondheim/Norwegen) zur Begutachtung vorgelegen.

Meine akademischen Lehrer in Mathematik waren die Professoren Dinghas, Grottemeyer, Guthschmidt, Orsinger, Pachale, Preuß, Ringel, Schäfke und Stöhr.

Vorlesungen in Physik hörte ich bei den Professoren Päsler und Wilking.

Professor Hinderer war mein akademischer Lehrer in Astronomie. Von 1970 bis Februar 1974 war ich als Studentische Hilfskraft am I.Mathematischen Institut der Freien Universität Berlin, vom 1. März 1974 bis zum 29. Februar 1976 als Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Medizinische Statistik und Dokumentation der Medizinischen Hochschule Lüneburg und dann bis zum 16. Mai 1976 als Wissenschaftlicher Mitarbeiter beim Umweltbundesamt Berlin tätig.

Seit dem 17. Mai 1976 bin ich Wissenschaftlicher Assistent am Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Berlin.

Am 22. Dezember 1967 heiratete ich Dagmar Erichsen. Wir haben ein Kind.

